Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

O Raciocínio Matemático dos alunos do 7.º ano em tarefas de exploração e investigação no tópico Triângulos

Cristina Rei Santos

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

2011

Universidade de Lisboa

Relatório da Prática de Ensino Supervisionada

O Raciocínio Matemático dos alunos do 7.º ano em tarefas de exploração e investigação no tópico Triângulos

Cristina Rei Santos

Orientadora: Prof. Doutora Hélia Oliveira

Co-orientadora: Prof. Doutora Suzana Nápoles

Mestrado em Ensino de Matemática no 3.º ciclo do Ensino Básico e no Secundário

2011

Agradecimentos

À minha orientadora, a Professora Doutora Hélia Oliveira por todos os valiosos conselhos e sugestões, pelo constante incentivo e pela disponibilidade sempre demonstrada, por não ter deixado de acreditar em mim.

À Professora Doutora Suzana Nápoles, minha co-orientadora, pela ajuda ao longo do ano lectivo.

À Professora Cristina Ramos por tudo o que me ensinou, pela ajuda que sempre me disponibilizou e por todo o tempo dispensado comigo.

À Escola Básica 2.3 Maria Alberta Menéres pela forma como me recebeu e por me ter possibilitado a realização deste estudo.

Aos alunos da turma participante no estudo pela atenção, participação, esforço e disponibilidade que demonstraram.

À minha Tia Bela e à minha prima Marta pela disponibilidade que tiveram para me ajudar sempre que precisei.

Aos meus pais por todo o amor, carinho, apoio e compreensão que sempre me dispensaram e que fizeram de mim o que sou hoje, por nunca me terem deixado desistir e por tudo o que fizeram para que pudesse completar os meus estudos.

Ao meu irmão pela paciência que teve ao longo destes meses e por todas as vezes que me fez rir.

A todas as pessoas que, neste último ano, fizeram parte da minha vida e que me proporcionaram a mais rica experiência de aprendizagem da minha vida.

Resumo

Ao longo deste relatório, apresenta-se um estudo realizado numa turma do 7.º ano, no âmbito da leccionação no tópico “Triângulos e Quadriláteros”. O seu objectivo é analisar o raciocínio matemático dos alunos nos subtópicos “Ângulos: amplitude e medição” e “Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo”, recorrendo, em particular, a tarefas de exploração e investigação. Para tal, formulei as seguintes questões: Como é que os alunos formulam, testam e justificam as suas conjecturas na resolução de tarefas de exploração/investigação? Como é que fundamentam as suas afirmações usando conceitos e propriedades geométricas? Que dificuldades evidenciam no que se refere ao raciocínio matemático?

Os dados analisados neste estudo foram recolhidos essencialmente através de dois métodos: as produções escritas dos alunos e as gravações áudio e vídeo das aulas.

A partir desses dados pude concluir que a formulação de conjecturas assenta, essencialmente, na observação de alguns casos particulares, sendo, também, influenciada pelos conhecimentos e experiências anteriores dos alunos. O teste de conjecturas não surge como processo independente, estando incorporado na própria formulação da conjectura. Ao justificarem as suas afirmações os alunos não utilizam apenas as definições e propriedades geométricas, recorrendo, também à visualização e aos valores numéricos. Este estudo revela que os alunos manifestam, ainda, muitas dificuldades com a demonstração, o que é natural, visto ser o seu primeiro contacto com esta faceta do raciocínio matemático, contudo, algumas reacções positivas evidenciam que é possível esta ser trabalhada neste nível de escolaridade.

Palavras-chave: raciocínio matemático; geometria; conjecturas; justificação; demonstração.

Abstract

Throughout this report, we present a study in a class of grade 7, based on a teaching unit under the topic "Triangles and Quadrilaterals". Its purpose is to analyze the students' mathematical reasoning in subtopics "Angles: amplitude and measurement" and "Sum of internal and external angles of a triangle", using, specially, exploration and investigation tasks. To this end, I formulated the following questions: How do students formulate, test and justify their conjectures in solving exploration and investigation tasks? How do students justify their claims using geometric concepts and properties? What are the difficulties they face with regard to mathematical reasoning?

The data analyzed in this study were collected mainly through two methods: the students' written productions and audio and video recordings of classes.

From these data I could conclude that the formulation of conjectures is essentially based on the observation of some particular cases, as well as being influenced by students' knowledge and past experiences. The test of conjectures does not come as an independent process, as it is embedded in the formulation of the conjecture. To justify their claims students not only use the definitions and geometric properties, but also the visualization and the numerical values. This study shows that students still have many difficulties with the demonstration, which is natural, because it constitutes the first contact with this facet of mathematical reasoning. However, some students' positive reactions show that it can be explored in these school grades.

Keywords: mathematical reasoning, geometry, conjecture, justification, demonstration.

Índice

Índice de Figuras

Índice de Quadros

1. Introdução

A Matemática sempre foi a disciplina que mais me fascinou. A sua estrutura em que tudo se prova através de algumas definições e axiomas, em conjugação com regras lógicas pareceu-me desde o princípio fascinante, uma vez que possibilitava que, sabendo apenas alguns conceitos, se pudesse construir todo o conhecimento necessário simplesmente raciocinando. A Geometria é, dentro de todos os temas matemáticos, o que mais me encanta. Desde pequena que aprecio a quantidade de informação que se consegue retirar a partir de uma pequena quantidade de dados e como isso pode ser útil no mundo real.

Ao longo do ensino básico fazia-me alguma confusão que os meus colegas tivessem tantas dificuldades nesta disciplina e que estudassem tanto sem conseguirem resultados, uma vez que para mim a única coisa que era preciso fazer era pensar.

Deste modo, sempre considerei que a Matemática estava intimamente ligada ao raciocínio e que este seria, por conseguinte, a base para se aprender esta disciplina.

Curiosamente, na actualidade, o raciocínio matemático é considerado, pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) como uma capacidade transversal que se deve procurar desenvolver ao longo de todo o Ensino Básico e em todos os temas.

Por outro lado, a existência de diferentes tipos de tarefas e a necessidade de não nos limitarmos a utilizar um único tipo, de modo a podermos proporcionar aos alunos diferentes experiências de aprendizagem, foi um dos assuntos abordados neste mestrado em Ensino da Matemática, que me chamou mais a atenção. Em especial, considerei particularmente interessante as tarefas de exploração e investigação, pois possibilitavam aos alunos o contacto com um tipo de raciocínio que durante muito tempo eu não associei a esta disciplina, mas sem o qual a Matemática também não existiria, o raciocínio indutivo. Assim, e tendo em conta as orientações metodológicas do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), para que os alunos tenham diversos tipos de experiências matemáticas, através das tarefas propostas pelo professor, pretendo, neste estudo, valorizar as tarefas de exploração e investigação, levando os alunos a descobrirem um pouco mais sobre a actividade matemática.

Deste modo, a problemática a desenvolver tem como objectivo estudar o raciocínio matemático dos alunos no âmbito do tópico Triângulos e Quadriláteros, recorrendo, em particular, a tarefas de exploração e investigação. Tendo em conta este objectivo, formulei as seguintes questões:

i) Como é que os alunos formulam, testam e justificam as suas conjecturas na resolução de tarefas de exploração/investigação?

ii) Como é que os alunos fundamentam as suas afirmações usando conceitos e propriedades geométricas?

iii) Que dificuldades evidenciam os alunos no que se refere ao raciocínio matemático?

O estudo apresentado neste relatório foi desenvolvido no âmbito da leccionação dos subtópicos "Ângulos: amplitude e medição" e "Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo", numa turma do 7.º ano da Escola Básica 2.3 Maria Alberta Menéres, no ano lectivo de 2010/2011. Deste modo, ao longo deste estudo, pretendo reflectir sobre, em que medida, a unidade de ensino leccionada pôde contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Este trabalho é composto por diversos capítulos, desenvolvidos tendo em conta os objectivos do estudo e a unidade didáctica em que se enquadra. Deste modo, primeiramente, apresento alguma literatura de referência relativa ao raciocínio matemático e ao ensino da Geometria, no capítulo "Enquadramento teórico". O capítulo seguinte, "A unidade de Ensino", incide sobre a unidade didáctica subjacente a este estudo e procura explicitar as estratégias de ensino utilizadas e as tarefas propostas, atendendo às orientações curriculares vigentes, e apresenta ainda uma síntese das aulas leccionadas. Em seguida, apresento os "Métodos de recolha de dados" utilizados no decorrer do estudo. A "Análise de dados" constitui o capítulo 5. No último capítulo procuro responder às questões em estudo e reflectir sobre a minha prática lectiva, no âmbito da unidade de ensino que leccionei.

2. Enquadramento da problemática

A problemática em estudo foca-se, essencialmente, no estudo do raciocínio matemático, no âmbito do tema da Geometria, no 7.º ano de escolaridade. Deste modo, este capítulo centra-se em alguns dos aspectos do raciocínio matemático e em algumas considerações relativas ao ensino da Geometria.

2.1. O Raciocínio Matemático

Na sociedade dos nossos dias existe a ideia de que a Matemática tem um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio (Ponte & Sousa, 2010). No entanto, o que se entende por raciocínio não é assim tão evidente, como é possível perceber recorrendo, por exemplo, a um dicionário.

Se o raciocínio só por si não é claro, o raciocínio matemático então encerra ainda mais questões. Como refere Saraiva (2008) a "interpretação do que é o raciocínio matemático varia bastante" (p. 29), uma vez que "depende da perspectiva que cada um tem sobre o que é a Matemática" (p. 29). Embora Oliveira (2008) refira que a expressão designa "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3), salienta, ainda, que o raciocínio matemático não se restringe apenas ao raciocínio dedutivo, mas que inclui, também, outras vertentes de carácter mais intuitivo e relacionadas com um trabalho de cariz experimental. Neste sentido, o NCTM (2008) refere que o raciocínio matemático constitui uma forma eficaz "de desenvolver e expressar intuições sobre uma vasta gama de fenómenos" (p. 61).

De certo modo, como refere Moreira (2008), o raciocínio matemático "não se deixa encaixar em nenhuma definição" (p. 11), ou seja "não tem um conjunto de características definidoras necessárias e suficientes" (p. 11). Assim, vários autores (Oliveira, 2008; Saraiva, 2008; Veloso, 1998) consideram que uma das formas de compreender o raciocínio matemático é ter em conta o raciocínio dos próprios matemáticos ao trabalharem e criarem a Matemática. Desta forma, é possível, pelo menos, encontrar algumas das componentes deste raciocínio.

Ponte e Sousa (2010) referem, no âmbito do raciocínio matemático, a importância do raciocínio dedutivo e do indutivo e chamam, ainda, a atenção para o processo de raciocínio envolvido no estabelecimento de relações entre objectos, tanto matemáticos como não matemáticos, como um processo de raciocínio fundamental.

Por sua vez, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) aponta o raciocínio matemático como uma capacidade fundamental que envolve a formulação e o teste de conjecturas, bem como, numa fase mais avançada, a sua demonstração. Para além disto, considera também que "envolve a construção de cadeias argumentativas que começam pela simples justificação de passos e operações na resolução de uma tarefa e evoluem progressivamente para argumentações mais complexas" (p. 6) que utilizam a linguagem dos vários temas matemáticos. Assim, o raciocínio matemático é visto como uma capacidade que deve ser desenvolvida ao longo de todo o Ensino Básico e que é transversal a todos os temas matemáticos. Esta ideia é, também, corroborada pelo NCTM (2008), que salienta ainda a importância desta capacidade, referindo que "ser capaz de raciocinar é essencial para a compreensão da matemática" (p. 61).

Deste modo, o NCTM (2008) indica que ao longo da escolaridade se deverá procurar habilitar todos os alunos para:

- Reconhecer o raciocínio matemático e a demonstração como aspectos fundamentais da matemática;
- Formular e investigar conjecturas matemáticas;
- Desenvolver e avaliar argumentos e provas matemáticos;
- Seleccionar e usar diversos tipos de raciocínio e métodos de demonstração. (p. 61)

Oliveira (2008) observa que devido à complexidade do raciocínio matemático não se sabe, exactamente, como é que este se pode desenvolver. No entanto, como referem Ponte e Sousa (2010, p. 32), "aprende-se a raciocinar raciocinando e analisando os raciocínios realizados por nós e pelos outros".

O desenvolvimento do raciocínio matemático pode, então, iniciar-se pela justificação e explicitação dos raciocínios, evoluindo ao longo da escolaridade. A justificação é, assim, ao nível do 1.º ciclo, um dos subtópicos essenciais associados ao raciocínio matemático, no Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), conforme referem Ponte e Sousa (2010), estando associado ao objectivo específico "explicar ideias e processos e justificar resultados matemáticos" (p. 31). A justificação é, também um subtópico a aprofundar no 2.º ciclo, procurando-se levar o aluno a "explicar e justificar os processos, resultados e ideias matemáticos, recorrendo a exemplos e contra-exemplos e à análise exaustiva de casos" (ME, 2007, p. 47). Como refere o NCTM (2008), "Parte da beleza da Matemática consiste no facto de que, quando se verificam ocorrências interessantes, existe, geralmente uma boa razão" (p. 62), ou seja, a Matemática é algo que faz sentido. A justificação de resultados é uma das formas de levar os alunos a compreenderem e acreditarem nesta característica da Matemática. Ao mesmo tempo, a justificação é, como refere Rodrigues (2009), uma precursora da demonstração, uma vez que os alunos começam por se apoiar em casos particulares e evoluem para justificações cada vez mais gerais. Para tal, é necessário que os alunos compreendam que as suas afirmações têm de ser justificadas, ou seja que, pelo menos, têm de ser suportadas ou refutadas através de evidências, conforme refere o NCTM (2008). A colocação de questões, aos alunos, como "Porque é que isto resulta?" (NCTM, 2008, p. 63), "Porque pensas que isto é verdade?" (NCTM, 2008, p. 61) ou "Alguém aqui acha que a resposta é diferente, e porque?" (NCTM, 2008, p. 61) é uma das formas de os fazer compreender a necessidade de justificarem. As justificações devem, no entanto, ter em conta o nível dos alunos, bem como os seus conhecimentos. Nos primeiros anos, as justificações resultam da combinação de vários processos entre os quais a percepção, as evidências empíricas e pequenas cadeias de raciocínio dedutivo. Inicialmente, os alunos podem ter tendência para procurar justificar as suas afirmações reportando-se a outras pessoas ou tentando ir a votos, podem, ainda, utilizar estratégias de tentativa e erro ou a experimentação não sistematizada (NCTM, 2008). Ao longo do tempo, os alunos devem então compreender, não só, quais os argumentos válidos, mas também realizar as suas justificações de modo sistemático, saber quando experimentaram todos os casos possíveis e construir os seus argumentos com base nesses casos (NCTM, 2008).

A formulação, o teste e a prova de conjecturas são tópicos importantes do raciocínio matemático, citados por diversos autores (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003; NCTM, 2008; Oliveira, 2008; Veloso, 1998), devido, em parte, ao facto de estarem relacionados com a prática da matemática, tipificando o trabalho de um matemático. Tal como o NCTM, também o Programa de Matemática do Ensino Básico (2007) os refere como tópicos a trabalhar no âmbito desta capacidade transversal, estando a formulação e o teste presentes nos três ciclos de escolaridade, enquanto a prova aparece, somente, no 3.º ciclo.

As conjecturas correspondem a uma suposição informada (NCTM, 2008), sendo também "afirmações que necessitam de ser provadas" (Ramos, 2009, p. 15). Deste modo, uma conjectura não é uma conclusão, tendo um carácter provisório (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003).

A formulação de conjecturas utiliza um raciocínio, essencialmente, indutivo, que se pode basear na observação directa de dados, na manipulação dos mesmos ou, até, na analogia com outras conjecturas, entre outras formas (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003). O estudo de padrões e a procura de regularidades e de relações são exemplos de actividades que possibilitam o surgimento de conjecturas (NCTM, 2008). A formulação de conjecturas nem sempre é simples para os alunos, conforme assinalam Ponte, Brocado e Oliveira (2003), existindo alguma tendência para que as conjecturas não sejam apresentadas de modo completamente explícito. O registo escrito pode, então, ser uma mais-valia, na medida em que ao confrontarem-se com a necessidade de explicarem as suas ideias, ajuda-os a clarificarem-nas, como constatam os mesmos autores. O professor pode, ainda, ajudar os alunos a formularem conjecturas, não só proporcionando-lhes "múltiplas oportunidades e contextos de aprendizagem enriquecedores e envolventes" (NCTM, 2008, p. 62) necessários para que desenvolvam esta capacidade, mas também através da colocação de questões, como por exemplo: "O que achas que vai acontecer a seguir? Qual é o padrão? Isto é sempre verdade ou só algumas vezes?" (NCTM, 2008, p. 62).

Sabemos que as conjecturas depois de formuladas precisam de ser testadas (Ponte & Matos, 1996). Como referem estes autores, o teste de conjecturas pode ser realizado de diversas maneiras, por exemplo, avaliando casos escolhidos especificamente ou casos escolhidos de modo aleatório ou, ainda, procurando uma tentativa de prova. Os testes de conjecturas acabam, por vezes, por se fundir com o próprio processo indutivo, da formulação de conjecturas, uma vez que "a manipulação dos dados começa a apontar no sentido de certa conjectura para, logo em seguida, ser refutada por um caso em que não se verifica" (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003, p. 33). Estes testes conferem uma maior credibilidade à conjectura, ou seja, "a repetição de experiências bem conduzidas aumenta a nossa convicção de que a conjectura é verdadeira, faz crescer a sua plausibilidade" (Veloso, 1998, p. 361). No entanto, citando Polya, Veloso (1998), chama a atenção para o facto de que, por muitos testes ou verificações que se realizem à conjectura, esta continua sem estar provada. Apesar de o teste de conjecturas ser um processo que os alunos interiorizam facilmente, na verdade, estes têm alguma tendência para considerar as conjecturas válidas apenas a partir da verificação de um número reduzido de casos, conforme referem Ponte, Brocado e

Oliveira (2003). Deste modo, é necessário que tal como refere o NCTM (2008) que compreendam que "a existência de vários exemplos não é suficiente para que se estabeleça a verdade de uma conjectura" (p. 220) e que é possível refutar uma conjectura através de um contra-exemplo. Como tal, os alunos devem de ser encorajados a procurar contra-exemplos (NCTM, 2008; Ponte, Brocado & Oliveira, 2003). Neste ponto, a formulação de conjecturas incorrectas desempenha um papel fundamental, uma vez que permite, não só o recurso ao contra-exemplo, como ainda possibilita a análise da razão pela qual a conjectura, sendo aparentemente verdadeira, acaba por se verificar falsa (NCTM, 2008). Para além disso, estas conjecturas incorrectas podem servir de base à formulação de uma nova conjectura válida, como exemplificam Ponte, Brocado e Oliveira (2003). Assim, "os processos de formulação de conjectura e o seu teste formam um ciclo que pode repetir-se algumas vezes" (Ponte & Matos, 1996, p. 124).

Numa investigação matemática, a última etapa diz respeito "à argumentação, à demonstração e à avaliação do trabalho do trabalho realizado" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p. 20), ou seja, corresponde à justificação e validação da conjectura. Em Matemática, a validação de um resultado passa pela sua demonstração, que tem que ser considerada válida pela comunidade matemática, conforme explicitam Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). Assim, seria, também, desejável que os alunos seguissem este mesmo esquema, acabando por demonstrar as suas conjecturas. Este trabalho é desenvolvido de forma gradual, iniciando-se com a procura de justificações aceitáveis, tendo por base o raciocínio plausível e os conhecimentos dos alunos, e vai evoluindo para a elaboração de pequenas provas, consoante os alunos vão aumentando as suas ferramentas matemáticas e interiorizando a necessidade de justificação (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003). Deste modo, a justificação das conjecturas desempenha um papel central, devendo procurar-se contornar a tendência de a deixar para segundo plano ou mesmo esquecida. Segundo Veloso (1998), deve-se, então, solicitar aos alunos que argumentem em defesa das suas conjecturas, procurando explicações para as mesmas. No entanto, é necessário ter em atenção se os conhecimentos dos alunos permitem encontrar uma justificação a favor da conjectura, ou mesmo um contra-exemplo, (NCTM, 2008), uma vez que mesmo algumas conjecturas simples "escondem processos de prova bastante complexos, mesmo para o professor" (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003, p.50). Apesar disso, o professor não deve deixar de "abordar investigações interessantes pelo facto de não se poderem demonstrar todos os resultados" (Veloso, 1998, p. 370), poderá é, como sugere o NCTM (2008), salientar, junto dos alunos que a demonstração exige mais conhecimentos do que aqueles que possuem nesse momento. Assim sendo, algumas vezes apenas teremos a confirmação experimental da veracidade da demonstração, outras, conseguiremos ter uma ideia do que está por trás da demonstração e, noutras ainda, podemos mesmo conseguir realizar verdadeiras demonstrações (Veloso, 1998). O professor poderá ajudar os alunos a justificarem as suas conjecturas colocando algumas questões: “Isto resulta sempre? Algumas vezes? Nunca? Porquê?” (NCTM, 2008, p. 63).

Tal como o próprio raciocínio matemático, a argumentação não é de simples definição, como salienta Duval (1990). No entanto, encontra-se intimamente relacionada com as outras componentes do raciocínio matemático, como por exemplo a justificação, a formulação, o teste e a justificação de conjecturas e, até, a própria demonstração. A argumentação é introduzida, pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (2007), no 2.º ciclo, continuando presente no 3.º ciclo. De acordo com Duval (1990), a argumentação está relacionada com a prática do discurso, possuindo uma lógica não formal que corresponde a um raciocínio espontâneo e natural. A argumentação recorre a raciocínios para justificar, explicar ou mesmo convencer alguém.

Uma demonstração é, de acordo com o NCTM (2008), um argumento que consiste “na dedução rigorosa e lógica de conclusões, a partir de hipótese iniciais”, pelo que podemos considerá-la como um caso particular da argumentação, tal como salienta (Pedemonte, 2000). Ramos (2009) salienta que as argumentações se podem considerar como uma demonstração, quando “deixam de se apoiar em argumentos empíricos” (p. 16). Apesar de a demonstração e a justificação não serem a mesma coisa, Rodrigues (2009) refere que uma justificação, também, se considerar uma demonstração desde que seja suficientemente geral e encerre um raciocínio dedutivo.

Deste modo, podemos dizer que “a demonstração é central ao raciocínio tipicamente matemático” (Oliveira, 2008, p. 3), fazendo parte do carácter distintivo da Matemática enquanto ciência e, por isso mesmo, desempenhando um papel preponderante na construção da própria Matemática, conforme salienta Veloso (1998).

A demonstração é, também, uma das dimensões do raciocínio matemático que o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) apenas introduz no 3.º ciclo, pretendendo-se não só demonstrar conjecturas e fazer demonstrações simples, mas também distingui-la tanto de um teste de conjecturas como de uma argumentação informal e ainda "seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração" (p. 64). Apesar disso, Rodrigues (2009), NCTM (2008) e Veloso (1998) chamam a atenção para o facto de, por exemplo, uma demonstração que recorra ao contra-exemplo ser acessível aos alunos mais novos. A construção do que é uma demonstração é assim feita de forma gradual por parte dos alunos (Veloso, 1998), tendo como ponto de partida a justificação e a argumentação. No entanto, a demonstração não é, habitualmente, um tema fácil para os alunos (NCTM, 2008). Veloso (1998) defende ainda que as demonstrações devem decorrer da actividade dos alunos, como por exemplo da prova das conjecturas por eles formuladas, uma vez que "existe uma muito maior motivação para demonstrar os resultados próprios que os alheios e a demonstração adquire desta forma outro significado e valor" (p. 373).

No entanto, Veloso (1998) considera que, para além das demonstrações efectuadas pelos alunos, o próprio professor deve apresentar-lhes algumas demonstrações que representem resultados importantes e com relevância na história da Matemática, de modo a que possam adquirir uma melhor compreensão do que é esta ciência e do poder da demonstração, bem como, analisar métodos de demonstração que não sejam habituais. Para que tal aconteça a escolha das demonstrações deve ser bastante criteriosa. A demonstração, tal como o próprio raciocínio matemático, mais globalmente, não podem ser trabalhados apenas numa única unidade, como por exemplo a Geometria, pelo contrário, devem ser transversais ao currículo (NCTM, 2008).

Deste modo, para desenvolverem os diversos tópicos associados ao raciocínio matemático os alunos deverão, tal como defende o NCTM (2008, p. 310), "ter uma prática diversa e frequente com o raciocínio matemático" através da análise de padrões e estruturas na procura de regularidades, da formulação de generalizações e conjecturas a partir de regularidades observadas, da validação de conjecturas e da construção e avaliação de argumentos matemáticos.

Ao mesmo tempo, é importante que o aluno discuta o seu raciocínio tanto com o professor, como com os colegas, elaborando, defendendo e analisando argumentos matemáticos, nomeadamente ao explicar qual a base das suas conjecturas e a lógica seguida. A apresentação de argumentos, tanto plausíveis como inconsistentes por parte dos alunos aos colegas, proporcionam momentos de discussão, podem "contribuir para alterar, consolidar ou fortalecer os seus argumentos ou raciocínio" (NCTM, 2008, p. 64).

Para tal, Ponte e Sousa (2010) destacam que é necessário “partir de tarefas apropriadas, matematicamente ricas mas susceptíveis de ser entendidas pelos alunos e, principalmente, manter um discurso que convide à participação, justificação e reflexão por parte dos alunos” (p. 32). As tarefas de exploração e as tarefas de investigação são, assim, à partida, apropriadas para promover o desenvolvimento do raciocínio matemático, uma vez que na sua realização “temos, por um lado, a formulação de conjecturas (sobre um objecto especifico ou genérico), apoiada numa razão e, por outro lado, a definição de uma estratégia de teste de uma conjectura” (Ponte & Sousa, 2010, p. 31).

Em contrapartida, “a memorização sem compreensão, a resolução de exercícios rotineiros e a realização de tarefas padronizadas” (Oliveira, 2008, p. 8) são condições que não são propícias a este desenvolvimento, conforme salienta este autor, referindo Steen (1999).

A tecnologia, quando associada a tarefas adequadas, pode ser uma forma de tornar o raciocínio matemático mais potente, desde que utilizada apropriadamente, uma vez que pode ser um apoio na formulação de conjecturas e até fornecer ideias para o raciocínio dedutivo (Oliveira, 2008).

O desenvolvimento do raciocínio matemático constitui também um desafio para o próprio professor, tanto ao nível das dificuldades dos alunos como da gestão curricular. Um dos principais desafios que o professor enfrenta prende-se com o tempo, tanto na gestão curricular como na gestão da própria aula. Rodrigues (2009) refere que encontrar tempo que permita trabalhar o raciocínio matemático, de uma forma integrada, é um dos desafios que se colocam e que, de acordo com a autora, se poderia conseguir abordando a gestão curricular de uma forma integrada e conectada. Oliveira (2008) chama a atenção para a necessidade de não se procurar “precipitar o fim do período experimental da tarefa” (p. 8), de modo a chegar mais rapidamente à demonstração.

Um outro desafio que se coloca ao professor é, como refere Veloso (1998), compreender quando é que o argumento ou a justificação de um aluno se pode ou não considerar uma demonstração. Uma justificação em que se analise todos os exemplos conhecidos poderá constituir uma justificação plausível, mas, no entanto, para o autor não se trata de uma demonstração. Por outro lado, uma justificação que a partir de um exemplo generalizável, ou seja, da demonstração da “afirmação num caso particular, mas de tal modo que o leitor ficará convencido que essa prova será válida no caso geral", corresponde aos processos de demonstração do séc. XVII e pode-se dever, por exemplo, ao facto de o aluno ainda não possuir notação que lhe permite chegar ao caso geral, poderá ser considerada uma demonstração.

Um último aspecto a ter em atenção e que pode constituir um obstáculo ao desenvolvimento do raciocínio matemático é a auto-estima dos alunos. Apesar de se dizer que "errar é humano" e de o método de tentativa e erro fazer, também, parte da actividade matemática, a verdade é que os falhanços podem desencadear frustração e desânimo nos alunos, devastando a sua auto-estima, "inibindo a sua capacidade de raciocinar matematicamente ou o seu desejo de o fazer" (Oliveira, 2008, p. 8).

2.2. *O ensino da Geometria*

As perspectivas relativas ao ensino da Geometria têm evoluído com o tempo. Durante o movimento da Matemática Moderna, a Geometria era vista como uma ilustração do carácter axiomático e dedutivo da Matemática (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2003), desvalorizando-se "os aspectos ligados à observação, à experimentação e à construção" (p. 82). Assim, o ensino da Geometria baseava-se na apresentação de uma axiomática, organizando-se as actividades dos alunos a partir da mesma (Veloso, 1998).

Em contrapartida, Loureiro (2009) refere que, na actualidade, a Geometria é apontada como a parte da Matemática em que predomina o raciocínio visual. Neste sentido, as tendências actuais, de acordo com Ponte, Brocardo & Oliveira (2003), salientam o papel fundamental da Geometria "para compreender o espaço em que nos movemos e para perceber aspectos essenciais da actividade matemática" (p. 83). Deste modo, pretende-se, acima de tudo, que estudando geometria, os alunos possam "aprender as formas e as estruturas geométricas e o modo de analisar as suas características e relações" (NCTM, 2008, p.44). Para tal, Ponte, Brocardo & Oliveira (2003) referem que é importante que os conceitos e objectivos sejam trabalhados de um ponto vista mais experimental e que se explorem aplicações da Geometria à vida real.

Em particular, o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) defende que na Geometria, se procure, ao longo destes anos, desenvolver o sentido espacial, especialmente a visualização, e a compreensão das propriedades das figuras geométricas, assim como a utilização dos conhecimentos e capacidades na resolução de problemas.

A visualização está, então, fortemente ligada à Geometria. O NCTM (2008) define a visualização espacial como sendo “a construção e manipulação de representações mentais de objectos bi e tridimensionais e a percepção de um objecto a partir de diferentes perspectivas” (p. 44). A visualização inclui, de acordo com Ponte e Sousa (2010), vários aspectos: “coordenação visual-motora, memória visual, percepção figura-fundo, constância perceptual, percepção da posição no espaço, constância perceptual, percepção da posição no espaço, percepção de relações espaciais e discriminação visual” (p. 22). Deste modo, a visualização abrange não só a observação, mas também a manipulação e a transformação dos objectos e representações, assim como a interpretação das relações entre objectos e entre estes e as suas representações, sendo, por conseguinte uma capacidade relacionada com a forma de percepcionar o mundo dos alunos (Ponte & Sousa, 2010). Veloso (1998) considera que a visualização se pode treinar utilizando “métodos activos de construção e manipulação de modelos” (p. 133).

A Geometria é um tema propício a um ensino de natureza exploratória e investigativa, como referem Ponte, Brocardo e Oliveira (2003). É assim possível conceber tarefas que, na sua exploração, contribuem para uma compreensão das noções e relações geométricas, bem como formular e testar conjecturas, podendo assim ajudar o aluno a aprender a raciocinar de forma cuidadosa sobre as noções geométricas (NCTM, 2008). A Geometria fornece um contexto apropriado e natural para o desenvolvimento do raciocínio matemático, em particular do raciocínio indutivo, dedutivo e das capacidades de argumentação (NCTM, 2008)

Tanto o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) como o NCTM (2008) referem que os ambientes de geometria dinâmica desempenham um papel importante no ensino da Geometria. Estes programas possuem uma função que permite o arrastamento de pontos ou partes de figura, que, como Candeias (2005) refere, respeita as propriedades das construções geométricas. Deste modo permite que os alunos criem muitos exemplos, facilitando a formulação de conjecturas.

Portanto, a problemática definida neste estudo enquadra-se bem no âmbito da Geometria, uma vez que é um contexto adequado para o desenvolvimento dos diferentes aspectos do raciocínio matemático.

3. A Unidade de Ensino

O presente estudo tem por base a minha intervenção lectiva, numa turma do 7.º ano de escolaridade da Escola Básica Maria Alberta Menéres, no início do 3.º Período, do presente ano lectivo (2010-2011), mais precisamente, entre os dias 26 de Abril e 12 de Maio de 2011. A planificação desta unidade, que se integra no tópico Triângulos e Quadriláteros foi realizada tendo em conta os objectivos a atingir, as orientações curriculares e as características da turma.

Neste capítulo apresento, então, a turma, os conceitos matemáticos relevantes para a unidade e os objectivos programáticos. Para além disso, exponho ainda as estratégias de ensino adoptadas e as aulas leccionadas.

3.1. Caracterização da turma

Este estudo incide sobre a turma C do 7.º ano de escolaridade da escola acima referida, situada na Tapada das Mercês, no conselho de Sintra.

A turma participante é constituída por 27 alunos, dos quais 17 são rapazes e 10 são raparigas. As idades dos alunos, no início do presente ano lectivo, estavam compreendidas entre os 11 e os 16 anos, existindo 9 alunos que já ficaram, pelo menos uma vez, retidos ao longo do seu percurso escolar.

A turma foi formada neste ano lectivo, sendo que a maioria dos alunos frequentou no ano anterior diferentes turmas do 6.º ano nesta mesma escola. Existem ainda dois alunos repetentes do ano anterior e dois alunos que vieram transferidos de outras escolas, um dos quais repetente. Para além destes, no decurso do ano lectivo, integraram a turma dois novos alunos, um dos quais foi, entretanto, transferido para outra turma.

De um modo geral, esta é uma turma bastante heterogénea, tanto no aproveitamento, como na postura na sala de aula. Em relação ao aproveitamento, este tem sido considerado, pelo conselho de turma, como satisfatório, tanto no 1.º como no 2.º período. No entanto, no 1.º período, foram elaborados seis planos de recuperação e um plano de acompanhamento, tendo sido preparado mais um plano de recuperação no

2.º período. Neste 2.º período, foi então considerado que sete alunos apresentavam grandes dificuldades na generalidade das disciplinas. Simultaneamente, têm sido também destacados vários alunos como apresentando um aproveitamento excepcional.

Esta heterogeneidade é, também, visível na disciplina de Matemática. No 1.º período, esta foi uma das disciplinas em que os alunos revelaram mais dificuldades, sendo a média da turma de 2,68 (numa escala de 1 a 5) e a taxa de insucesso de 52%, muito embora se deva ter em conta que os níveis 1 atribuídos se devem à falta de assiduidade dos alunos. A Figura 1 sintetiza o aproveitamento desta turma na disciplina de Matemática no 1.º período.

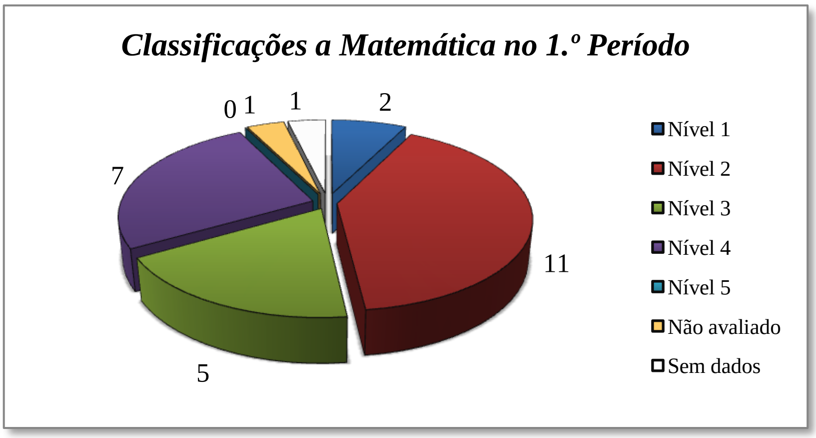


Figura 1 – Níveis obtidos pelos alunos em estudo no 1.º período na disciplina de Matemática.

O aproveitamento a Matemática melhorou consideravelmente no 2.º período (Figura 2), tendo aumentado tanto o número de alunos com o nível 3 como com o nível 5, passando a média da turma a aproximadamente 3,2 (numa escala de 1 a 5).

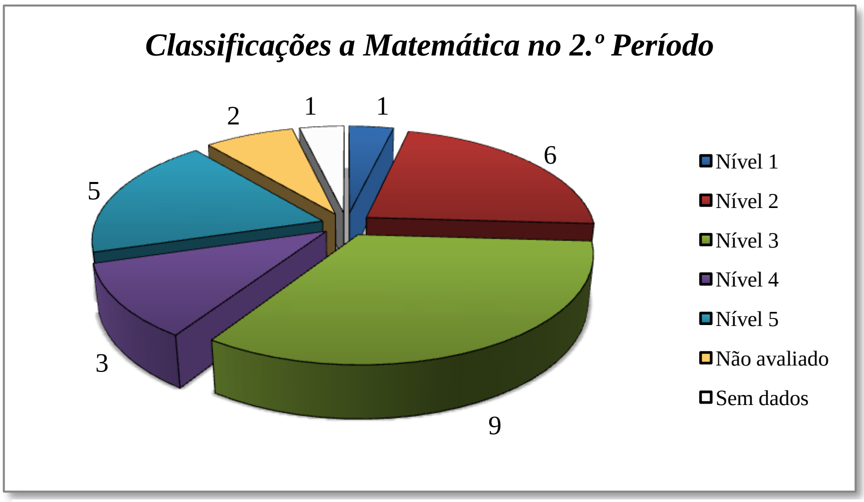


Figura 2 – Níveis obtidos pelos alunos em estudo no 2.º período na disciplina de Matemática.

Em relação ao comportamento, a turma não apresenta, normalmente, muitos problemas, muito embora existam alguns elementos destabilizadores. De um modo geral, a turma é bastante faladora, apesar de existirem, também, vários alunos muito tímidos. O Projecto Curricular de Turma, aponta ainda como uma das fragilidades da turma a falta de hábitos de trabalho e de organização de muitos alunos, bem como o não cumprimento das regras de sala de aula. Estes diferentes aspectos reflectem-se na aula de Matemática, em que o seu comportamento é um pouco irregular. Não obstante, normalmente, a turma é participativa e trabalha nas tarefas propostas em aula. É ainda necessário salientar que o comportamento melhorou significativamente neste 3.º período.

A heterogeneidade da turma revela-se também nas suas expectativas quanto ao futuro onde surgem opções que vão desde o futebol e a moda à arquitectura e medicina, bem como muitas outras profissões como, por exemplo, massagista.

Em relação às habilitações literárias dos encarregados de educação, estas são diversificadas, sendo que, apenas, dois possuem estudos superiores e um possui unicamente o 1.º ciclo.

3.2. *A unidade de ensino no programa*

A proposta pedagógica apresentada neste estudo foi aplicada no 7.º ano e enquadra-se no tópico Triângulos e Quadriláteros, do tema Geometria do 3.º ciclo. No entanto, a minha intervenção, que serve de base a este estudo, ocorreu apenas no subtópico "Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo".

Para além disso, uma vez que esta turma só este ano integrou o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), a minha intervenção englobou, também, o subtópico "Ângulos: amplitude e medição", do tópico Figuras no Plano do 2.º ciclo, que, de acordo com as orientações do Ministério da Educação, é um dos tópicos a ser leccionado aos alunos do programa de Matemática anterior.

O Programa refere que no âmbito do subtópico "Ângulos: amplitude e medição" se deve procurar atingir os seguintes objectivos específicos:

- Medir, em graus, a amplitude de um ângulo e construir um ângulo sendo dada a sua amplitude.
- Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos.
- Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos (ME, 2007, p. 37)

Para além disto, é também sugerido que se proponham situações para que os alunos estimem a ordem de grandeza dos ângulos e que se utilize uma aproximação ao grau na medição de amplitudes dos ângulos.

O programa do 2.º ciclo (1991) contemplava já alguns destes objectivos, pelo que, de acordo com este documento, se espera que os alunos tenham atingido o primeiro objectivo e parte do segundo, ou seja, que sejam capazes de:

- Identificar e traçar ângulos rectos, agudos, obtusos, rasos.
- Medir em graus a amplitude de um ângulo. (p. 25)

Por sua vez, em relação à soma dos ângulos internos e externos o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) define como objectivo específico "deduzir o valor da soma dos ângulos internos e externos de um triângulo", uma vez que esta propriedade teria sido já explorada no 2.º ciclo. O programa do 2.º ciclo (1991) também faz referência a uma parte deste objectivo, salientando que os alunos devem de "descobrir experimentalmente o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos de um triângulo" (p. 25).

O Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) refere ainda, em relação a este subtópico, que se pode também propor aos alunos com um melhor desempenho a dedução das fórmulas destas somas para um polígono com n lados.

Deste modo, na planificação desta unidade didáctica procurei atender aos objectivos do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), tendo, no entanto, em consideração o que de acordo com o programa do 2.º ciclo (1991) poderia já ter sido trabalhado pelos alunos nos anos anteriores.

Portanto, no decorrer das aulas por mim leccionadas foram trabalhados os subtópicos "Ângulos: amplitude e medição" e "Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo", abaixo apresentados (Quadro 1).

<table>
<tr><th>Subtópicos</th><th colspan="2">Objectivos específicos</th></tr>
<tr><td>Ângulos: amplitude e medição.</td><td>• Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos;
• Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos.</td><td rowspan="2">• Formular, testar e demonstrar conjecturas;
• Distinguir entre uma demonstração e um teste de conjecturas e fazer demonstrações simples;
• Usar raciocínio indutivo e dedutivo.</td></tr>
<tr><td>Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</td><td>• Deduzir a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</td></tr>
</table>

Quadro 1 – Subtópicos a trabalhar no âmbito do tópico Triângulos e Quadriláteros.

3.3. *Conceitos e propriedades matemáticos relativos à unidade*

A Geometria foi o tema matemático sobre o qual incidiu o presente estudo. Assim sendo, a unidade didáctica aqui apresentada centrou-se no estudo dos ângulos e dos triângulos, atendendo às orientações curriculares vigentes.

Deste modo, apresento em seguida os conceitos e relações matemáticos abordados ao longo desta unidade, bem como outros conceitos que embora possam não ter sido desenvolvidos nas aulas leccionadas se encontram intimamente relacionados com o tema e que, por essa mesma razão, considero necessários ter em atenção na planificação e preparação destes tópicos.

Um **ângulo** é cada uma das porções (ou regiões) de plano compreendidas entre duas semi-rectas com a mesma origem (Figura 3).

À origem das semi-rectas damos, então, o nome de <u>vértice do ângulo</u>, enquanto as semi-rectas se denominam por <u>lados do ângulo</u> (Figura 3).

Atendendo à definição de ângulo, os lados do ângulo dividem o plano em duas partes, sendo que uma delas contém os prolongamentos das semi-rectas chamando-se <u>ângulo côncavo</u>, enquanto a outra parte se diz <u>ângulo convexo</u> (Figura 3).

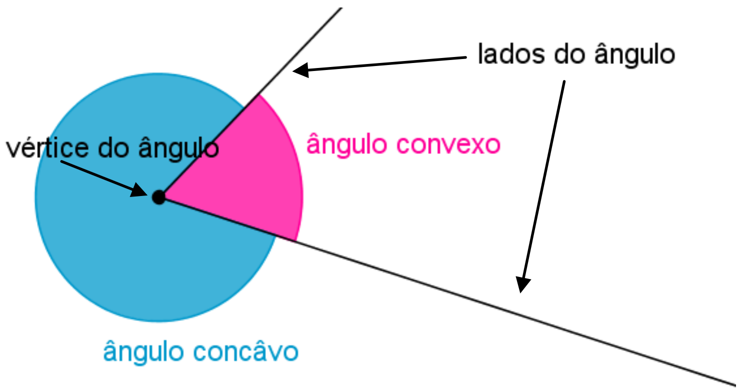


Figura 3 – Elementos de um ângulo.

No entanto, ao longo deste estudo, considerou-se que ao se referir ângulos apenas se estaria a pensar no ângulo convexo, exceptuando quando fosse dada alguma informação em contrário.

Em relação à notação utilizada para definir um ângulo, esta pode, entre outras coisas, recorrer às letras que denotam os 3 pontos que definem os seus lados, sendo que a letra correspondente ao seu vértice figura entre as outras duas. Pode-se também, por exemplo, quando não existir perigo de confusão utilizar apenas a letra do vértice. De um modo geral, para denotar um ângulo utiliza-se o símbolo $\measuredangle$. Assim sendo, se tivermos um ângulo de vértice B e lados BA e BC (Figura 4) podemos designa-lo por $\measuredangle ABC$ ou $\measuredangle B$. Apesar disso, neste estudo foi utilizada uma notação simplificada, substituindo-se o símbolo $\measuredangle$ pela palavra ângulo, como recomendam Ponte, Oliveira e Candeias (2009), pelo que no exemplo acima o ângulo seria denotado, simplesmente, por ângulo ABC.

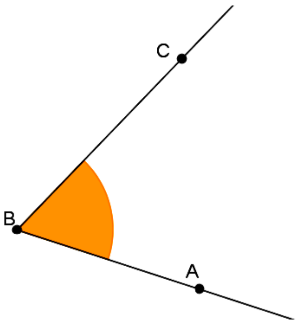


Figura 4 – Ângulo ABC.

É possível distinguir vários tipos de ângulos:

- Um <u>ângulo nulo</u> (Figura 5) é o ângulo convexo cujos lados se sobrepõem;

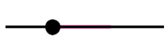


Figura 5 – Ângulo nulo.

- Um <u>ângulo raso</u> (Figura 6) é aquele cujos lados estão no prolongamento um do outro;

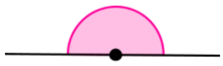


Figura 6 – Ângulo raso.

- Um <u>ângulo recto</u> (Figura 7) é um ângulo igual a metade de um ângulo raso;

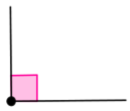


Figura 7 – Ângulo recto.

- Um <u>ângulo agudo</u> (Figura 8) é aquele que é menor do que um ângulo recto e maior do que um ângulo nulo;

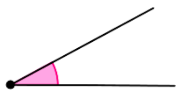


Figura 8 – Ângulo agudo.

- Um ângulo obtuso (Figura 9) é aquele que é maior do que um ângulo recto mas menor que um ângulo raso;

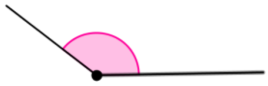


Figura 9 – Ângulo obtuso.

- Um ângulo giro (Figura 10) é o ângulo côncavo cujos lados se sobrepõem.

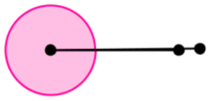


Figura 10 – Ângulo giro.

Apesar de existirem diversas unidades utilizadas para medir a amplitude de um ângulo, neste estudo consideraremos apenas uma das principais medidas, o grau. Esta unidade é fixada, tendo por base o ângulo recto, considerando-se que se dividirmos o ângulo recto em 90 partes iguais obtemos um grau. Para além disso, a unidade de medida da amplitude do ângulo é um sistema sexagesimal, pelo que um grau se divide em 60 minutos que, por sua vez se dividem cada um em 60 segundos. Assim sendo, a amplitude de um ângulo recto mede 90º, a de um raso 180º, a de um nulo 0º, a de um giro 360º e a amplitude um ângulo agudo mede entre 0º e 90º, enquanto a de um ângulo obtuso mede entre 90º e 180º. Neste estudo denotaremos a medida da amplitude de um ângulo utilizando o símbolo $\angle$.

Tal como acontece com outros elementos geométricos, também, nos ângulos é possível estabelecer relações. Na Geometria uma das principais relações entre dois objectos é a **congruência**. Dizemos, então, que duas figuras planas são congruentes quando se podem fazer coincidir ponto por ponto. Por conseguinte, também dois ângulos se dizem congruentes quando é possível fazê-los coincidir ponto por ponto, ou seja, dois ângulos são congruentes se e só se a medida das suas amplitudes é igual.

Relações entre pares de ângulos

À parte da congruência podem-se definir outras relações entre pares de ângulos, que dão origem a algumas propriedades importantes.

<u>Definição:</u> Ângulos adjacentes

Dizemos que dois ângulos são **adjacentes** se têm o vértice e um lado comum estando situados para lados opostos em relação ao lado comum, ou seja, não estão sobrepostos (Figura 11).

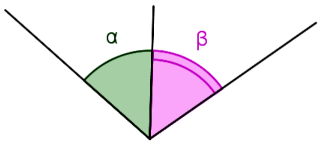


Figura 11 – Exemplo de um par de ângulos adjacentes.

<u>Definição:</u> Ângulos suplementares

Dois ângulos dizem-se **suplementares** se a sua soma é igual a um ângulo raso, ou seja, se a soma da medida das suas amplitudes é 180º (Figura 12).

Figura 12 – Ângulos suplementares.

<u>Definição:</u> Ângulos complementares

Dois ângulos cuja soma é igual a um ângulo recto, isto é cuja soma da medida das suas amplitudes é 90º, denominam-se de ângulos **complementares** (Figura 13).

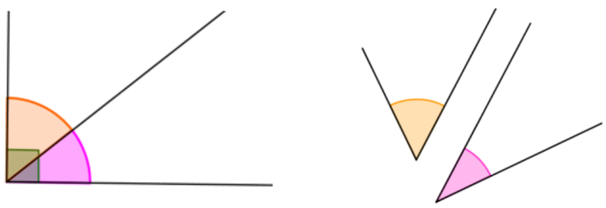


Figura 13 – Ângulos complementares.

Note-se que dois ângulos complementares ou suplementares de um terceiro ângulo são congruentes.

<u>Definição:</u> Ângulos verticalmente opostos

Dizemos que dois ângulos são **verticalmente opostos** quando os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro (Figura 14).

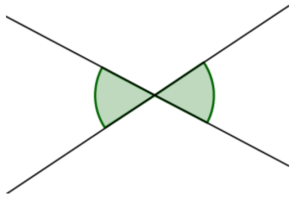


Figura 14 – Ângulos verticalmente opostos.

Em relação a estes pares de ângulos é possível provar algumas propriedades.

<u>Propriedade 1:</u>

Dois ângulos verticalmente opostos são congruentes.

<u>Demonstração:</u>

Sejam α, β, γ e δ os ângulos formados pela intersecção de duas rectas (Figura 15).

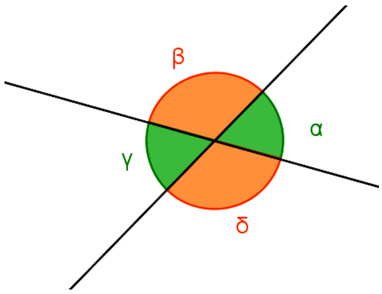


Figura 15 – Ângulos formados por duas rectas concorrentes.

Temos, então, que:

$\angle\alpha + \angle\beta = 180°$, porque α e β são ângulos suplementares;

$\angle\gamma + \angle\beta = 180°$, porque β e γ são, também, ângulos suplementares.

Assim sendo, $\angle\alpha = \angle\gamma$, pelo que os ângulos α e β são congruentes.

De igual modo, também os ângulos β e δ são congruentes.

Portanto, os ângulos verticalmente opostos são congruentes.

Consideremos duas rectas r e s e uma recta t secante, ou seja que intersecta r e s. Neste caso formam-se então oito ângulos (Figura 16).

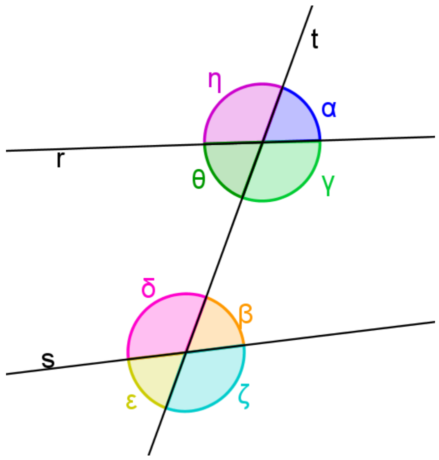


Figura 16 – Ângulos num sistema de duas rectas e uma secante.

Se atendermos às rectas r e s, podemos considerar os ângulos como internos, quando estão entre as rectas, ou seja, os ângulos θ, γ, δ e β, e como externos os ângulos α, η, ε e ζ.

Para além disso, quaisquer dois destes ângulos em relação à secante podem estar no mesmo semi-plano definido por ela e diremos que são ângulos da mesma parte, ou em semi-planos distintos, designando-se, então por alternos.

Assim sendo, os pares de ângulos:

i) θ e δ; γ e β dizem-se **ângulos internos da mesma parte**, se são da mesma parte e ambos internos;

ii) η e ε; α e ζ denominam-se por **ângulos externos da mesma parte**, quando, para além de serem ângulos da mesma parte são ambos externos;

iii) η e δ; θ e ε; α e β; γ e ζ dizem-se **ângulos correspondentes**, quando são ângulos da mesma parte, mas um é externo e o outro interno;

iv) θ e β; δ e γ dizem-se **ângulos alternos internos**;

v) η e ζ; α e ε dizem-se **ângulos alternos externos**.

<u>Teorema 1:</u>

Se dois ângulos alternos internos são congruentes, então as rectas são paralelas.

Teorema 2:

Se duas rectas são paralelas, então os ângulos alternos internos determinados por uma secante são congruentes.

Demonstração:

Suponhamos que $DC \parallel AB$.

Seja IC uma recta, tal que os ângulos ACI e α são congruentes, ou seja que $\angle ACI = \angle\alpha$ (Figura 17).

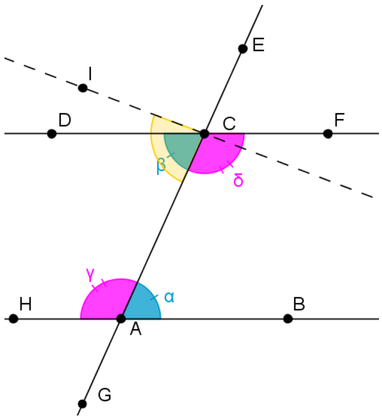


Figura 17 – Recta *IC*.

Temos então que:

- $IC \parallel AB$, pelo teorema anterior, uma vez que ACI e α são ângulos alternos internos congruentes.
- IC e DC são coincidentes, pois por C passa uma e uma só paralela a AB (postulado de Euclides).
- $\angle\alpha = \angle\beta$, pois como IC coincide com DC, $\angle\beta = \angle ACI$ e, por hipótese, $\angle ACI = \angle\alpha$.
- $\angle\gamma = \angle\delta$, pois γ e δ são suplementares de ângulos congruentes, α e β.

Portanto, α e β são congruentes, assim como γ e δ, e, por conseguinte, os ângulos alternos internos são congruentes.

Teorema 3:

Se os ângulos alternos internos são congruentes, então os ângulos alternos externos, também, são congruentes.

Demonstração:

Suponhamos que α e β são congruentes e que γ e δ são congruentes, ou seja que $\angle\alpha = \angle\beta$ e que $\angle\gamma = \angle\delta$ (Figura 18).

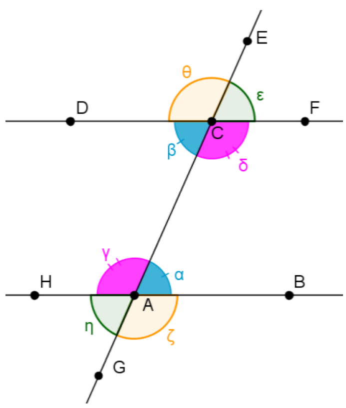


Figura 18 – Sistema de duas paralelas e uma secante.

Temos então que:

- $\angle\gamma = \angle\alpha$, porque α e γ são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle\eta = \angle\beta$, porque, por hipótese $\angle\alpha = \angle\beta$.

- $\angle\beta = \angle\varepsilon$, porque β e ε são ângulos verticalmente opostos.

Logo, $\angle\eta = \angle\varepsilon$ e, por conseguinte η e ε são congruentes.

Para além disso, temos que ζ e θ são congruentes, porque são ângulos suplementares de ângulos congruentes, η e ε respectivamente.

Portanto, os ângulos externos são congruentes.

Teorema 4:

Se os ângulos alternos internos são congruentes, então os ângulos correspondentes, também, são congruentes.

Demonstração:

Suponhamos que α e β são congruentes e que γ e δ são congruentes, ou seja que $\angle\alpha = \angle\beta$ e que $\angle\gamma = \angle\delta$ (Figura 18).

Temos então que:

- $\angle\varepsilon = \angle\beta$, porque ε e β são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle\varepsilon = \angle\alpha$, porque, por hipótese, α e β são congruentes.
- $\angle\eta = \angle\alpha$, porque α e η são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle\eta = \angle\beta$, porque, por hipótese, α e β são congruentes.
- $\angle\zeta = \angle\delta$, porque ζ e δ são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle\zeta = \angle\gamma$, porque, por hipótese, γ e δ são congruentes.
- $\angle\theta = \angle\gamma$, porque θ e γ são ângulos verticalmente opostos.
- $\angle\theta = \angle\delta$, porque, por hipótese, γ e δ são congruentes.

Deste modo, α e ε são congruentes, bem como os pares β e η, ζ e γ, θ e δ.

Portanto, os ângulos correspondentes são congruentes.

Triângulos

Um triângulo é um polígono de três lados. Como tal, os seus elementos fundamentais são os lados e os ângulos. Apesar disso, o estudo apresentado neste relatório incidiu mais fortemente nos ângulos, razão pela qual os conceitos e propriedades aqui apresentados dizem apenas respeito aos ângulos do triângulo.

Num triângulo, tal como em qualquer outro polígono convexo, podemos considerar dois tipos de ângulos, os ângulos internos e os externos (Figura 19)

Denominamos por ângulo interno dum triângulo o ângulo formado por dois lados consecutivos, tendo por vértice o vértice do polígono.

Por sua vez, chamamos ângulos externos dum triângulo aos ângulos formados por cada lado com o prolongamento do outro que lhe é contíguo no mesmo vértice.

Assim sendo, os ângulos internos e externos são suplementares.

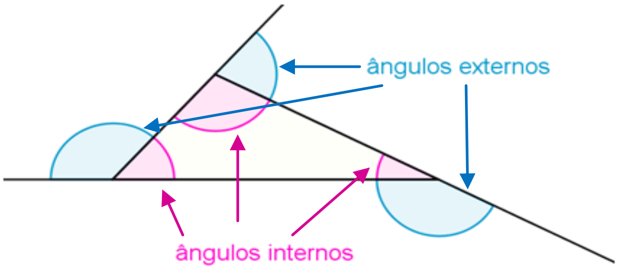


Figura 19 – Ângulos de um triângulo.

Teorema 5:

A soma dos três ângulos internos de um triângulo é igual a um ângulo raso.

Demonstração:

Consideremos o triângulo ABC.

Tracemos a recta DE paralela ao lado AC e que passa por B (Figura 20).

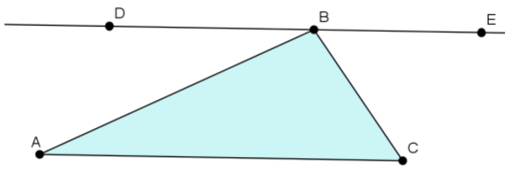


Figura 20 – Esquema do triângulo ABC e recta DE.

Como a recta DE é paralela ao lado AC, temos então que:

- $\angle CAB = \angle DBA$, porque os ângulos CAB e ABD são ângulos alternos internos.
- $\angle BCA = \angle CBE$, porque os ângulos BCA e CBE são ângulos alternos internos.

Para além disso, temos também que $\angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°$, porque os ângulos ABD, ABC e CBE formam um ângulo raso.

Logo, $\angle BCA + \angle ABC + \angle BCA = 180°$.

Teorema 6:

Num triângulo, um ângulo externo é igual à soma dos ângulos internos não adjacentes.

Demonstração:

Consideremos o ângulo externo CBE do triângulo ABC (Figura 21).

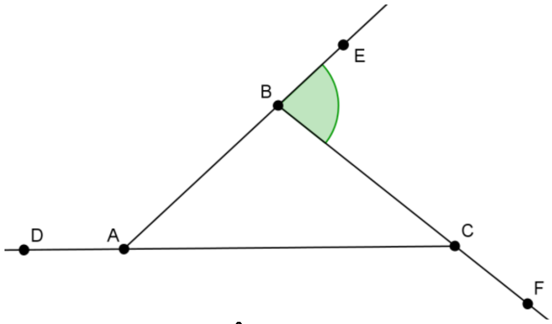


Figura 21 – Ângulo externo CBE.

Temos, então, que:

- $\angle CBE + \angle ABC = 180°$, porque os ângulos CBE e ABC são suplementares.
- $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$, porque é a soma dos ângulos internos do triângulo ABC.

Donde obtemos que $\angle CBE + \angle ABC = \angle CAB + \angle ABC + \angle BCA$.

Portanto, $\angle CBE = \angle CAB + \angle BCA$.

Note-se que a demonstração apresentada não é única, podendo-se também, por exemplo, considerar, tal como aconteceu para a soma dos ângulos internos, uma paralela a AC e chegar à conclusão por meio das relações entre os ângulos.

Do mesmo modo, também o resultado seguinte possui várias demonstrações, tendo-se para apresentar aqui apenas uma.

Teorema 7:

A soma das amplitudes dos três ângulos externos do triângulo é igual à amplitude um ângulo giro, ou seja, 360º.

Demonstração:

Consideremos o triângulo ABC, cujos ângulos externos são os ângulos BAD, ACF e CBE (Figura 22).

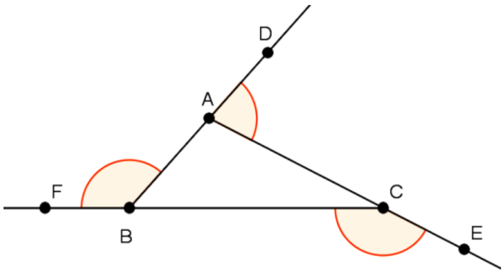


Figura 22 – Ângulos externos do triângulo *ABC*.

Temos então que:

- $\angle CAB + \angle BAD = 180°$, porque os ângulos CAB e BAD são suplementares.
- $\angle BCA + \angle ACF = 180°$, porque os ângulos BCA e ACF são suplementares.
- $\angle CBE = \angle CAB + \angle BCA$, pelo teorema anterior.

Então, obtemos que $\angle CAB + \angle BAD + \angle BCA + \angle ACF = 180 + 180 = 360°$, donde, substituindo os ângulos internos pelo externo, obtemos que $\angle BAD + \angle ACF + \angle CBE = 360°$.

3.4. *Estratégias de ensino*

A actividade que os alunos realizam é, de acordo com Ponte (2005), um dos factores que condicionam a sua aprendizagem, podendo esta actividade ser suscitada pelo professor através de tarefas adequadas, ou seja, de certo modo, como refere o NCTM (2008) "os alunos aprendem matemática através das experiências que os professores propiciam" (p. 17).

No caso da Geometria, Ponte, Brocado e Oliveira (2003) referem que:

> A Geometria é particularmente propícia, desde os primeiros anos de escolaridade, a um ensino fortemente baseado na exploração de situações de natureza exploratória e investigativa. (p. 71)

Do mesmo modo, também as orientações curriculares actuais salientam que o trabalho em Geometria reveste-se, preferencialmente, de um cunho exploratório e investigativo, pelo que as tarefas a propor aos alunos devem permitir-lhes "observar, analisar, relacionar e construir figuras geométricas" (Programa de Matemática do Ensino Básico, 2007, p. 36). Por conseguinte, é importante que o estudo, tanto dos conceitos como dos objectos geométricos e, até mesmo, das relações seja realizado "do ponto de vista experimental e indutivo" (Ponte, Brocado & Oliveira, 2003, p. 83).

Assim, ao longo desta unidade, procurei que os conceitos e relações geométricas em estudo fossem introduzidos através de tarefas de carácter exploratório e investigativo, que possibilitassem aos alunos estudar e compreender factos e relações geométricas, formulando, testando e, sempre que possível, provando conjecturas.

Atendendo à natureza desta estratégia, os momentos de discussão, após a resolução da tarefa, desempenham um papel fundamental, uma vez que permitem ao aluno reflectir sobre a sua actividade, contribuindo assim para a sua aprendizagem (Ponte, 2005). Ao mesmo tempo, dado que a discussão possibilita que os alunos comparem as suas ideias com as dos outros, pode então contribuir para "alterar, consolidar ou fortalecer os seus argumentos ou raciocínio" (NCTM, 2008, p. 64), favorecendo assim o desenvolvimento da argumentação e da comunicação matemática. Para além estes momentos representam, ainda, de acordo com Ponte (2005), "momentos por excelência para a sistematização de conceitos, a formalização e o estabelecimento de conexões matemáticas" (p. 16).

A problemática deste estudo centra-se em torno do raciocínio matemático, pelo que, por conseguinte, procurei que a formulação e o teste de conjecturas tivessem um papel preponderante no tipo de actividade que pretendia que os alunos desenvolvessem. Os ambientes de geometria dinâmica possuem algumas características que podem contribuir não só para a aprendizagem da geometria, mas também para o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Se, por um lado, estes programas permitem a realização de construções geométricas variadas, possibilitam, como refere Candeias (2005), o arrastamento de pontos ou partes de figuras. A movimentação destes elementos permite que se observe uma resposta dinâmica dos restantes elementos a essa alteração de condições, o que permite a análise das relações matemáticas, uma vez que este tipo de software mantem as relações específicas essenciais da construção original, como explica Jiang (in press). Assim sendo, esta tecnologia possibilita que os alunos criem muitos exemplos, ajudando-os a formular e a explorar conjecturas (NCTM, 2008). Jiang (in press) salienta ainda que os ambientes de geometria dinâmica podem também beneficiar os alunos no desenvolvimento das suas capacidades de provar matematicamente. Para além disso, estes programas contribuem para melhorar tanto o raciocínio espacial como a visualização (NCTM, 2008).

Portanto, neste estudo, procurei que os alunos utilizassem um software de Geometria Dinâmica na realização das tarefas de carácter exploratório e investigativo. De entre os vários programas computacionais disponíveis, optei por utilizar o *GeoGebra*, visto ser o que se encontrava disponível nos computadores da escola e, também, por ser um software de acesso livre e, consequentemente, acessível aos alunos mesmo fora da escola.

Dado que, como já referi, a discussão ocupa um papel importante nestas aulas e que a utilização do *GeoGebra* na resolução das tarefas é também central, optei também por utilizar o quadro interactivo, em especial como apoio a estes momentos. De facto, este recurso, ao permitir a utilização do *GeoGebra* com todas as suas potencialidades, pareceu-me poder facilitar a apresentação dos alunos das suas conjecturas, bem como a análise das mesmas e a exploração de outras que com estas estivessem relacionadas.

Em relação ao modo de trabalho dos alunos procurei ter em consideração as características das salas onde decorrem as aulas e a forma de trabalho com que estavam mais familiarizados. Assim, tendo em conta que os alunos já se encontram sentados a pares e que estão mais habituados a este tipo de trabalho privilegiei, essencialmente, o trabalho a pares. Estes pares foram formados no início deste estudo, tendo em conta as orientações da reunião do conselho turma, no final do 2.º período, e as características dos alunos, tendo apesar de tudo sofrido algumas pequenas alterações no decorrer da unidade.

Para além disto, a escolha do trabalho a pares deveu-se também ao facto de um dos recursos seleccionados ser o *GeoGebra*. Por um lado, como refere Jiang (in press), vários alunos à volta de um computador torna mais fácil o processo de formulação de conjecturas, a partir da observação das alterações que ocorrem no ecrã. Por outro, como o recurso à tecnologia não é, totalmente, pacífico e o software a utilizar não era, ainda, do conhecimento geral dos alunos, existia uma possibilidade maior de surgirem algumas dúvidas relacionadas com o mesmo. Deste modo, pareceu-me que este modo de trabalho seria vantajoso, na medida que possibilita que os alunos troquem impressões entre si, ajudando-se mutuamente, não deixando o esclarecimento das dúvidas unicamente a cargo do professor.

No entanto, a utilização de um computador por mais de dois alunos diminui a possibilidade de cada um dos alunos interagir com o computador, criando momentos de distracção e desatenção, dado que estes poderão perder grande parte do interesse. Note-se ainda que, no caso particular da turma em estudo, o espaço entre os computadores é reduzido e que não existem computadores suficientes para que os alunos trabalhem individualmente, dificultando, por conseguinte a utilização de outra estratégia.

Portanto, no decorrer desta intervenção procurei, essencialmente, que os alunos tivessem oportunidades de explorar situações que permitissem a formulação de conjecturas, de modo a permitir-lhes ter um papel activo na construção do seu conhecimento. Para além das estratégias de ensino foram tomadas outras opções tendo em conta os objectivos pretendidos para cada a aula, enunciados nos planos de aula (Anexo I), nomeadamente a selecção e construção das tarefas (Anexo II).

3.5. A Sequência de tarefas

Na planificação de uma unidade didáctica não basta seleccionar as tarefas ou os recursos a utilizar, é importante definir uma sequência de tarefas que permita aos alunos atingir os objectivos pretendidos. Deste modo, elaborei para esta unidade uma sequência de tarefas que permitisse aos alunos, por um lado, compreender os conceitos e relações geométricas em estudo e, por outro, desenvolver os diferentes aspectos do raciocínio matemático.

As fichas de trabalho aqui apresentadas foram trabalhadas ao longo das seis aulas desta unidade, sendo que algumas delas foram abordadas em mais do que uma aula, tal como mostra o quadro abaixo (Quadro 2), e outras foram trabalhadas pelos alunos em casa.

<table>
<tr><th rowspan="2">Calendarização</th><th rowspan="2">Sub-tópicos</th><th colspan="2">Fichas de trabalho</th></tr>
<tr><th>Aula</th><th>Casa</th></tr>
<tr><td>26 de Abril
(90 min.)</td><td rowspan="3">Ângulos: amplitude e medição.</td><td>• Ângulos verticalmente opostos;
• Relações entre ângulos I.</td><td>• Ângulos I</td></tr>
<tr><td>28 de Abril
(90 min.)</td><td rowspan="2">• Relações entre ângulos I;
• Relações entre ângulos II;</td><td>• Ângulos II</td></tr>
<tr><td>3 de Maio
(90 min.)</td><td>• Relações entre ângulos III</td></tr>
<tr><td>5 de Maio
(90 min.)</td><td rowspan="3">Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo</td><td>• Ângulos internos de um triângulo.</td><td>• Relações entre ângulos III</td></tr>
<tr><td>10 de Maio
(90 min.)</td><td>• Ângulos internos de um triângulo;
• Ângulos externos de um triângulo.</td><td></td></tr>
<tr><td>12 de Maio
(90 min.)</td><td>• Ângulos externos de um triângulo.</td><td></td></tr>
</table>

Quadro 2 – Calendarização das fichas de trabalho.

Seguidamente apresento então as tarefas, salientando o objectivo de cada uma, bem como a sua relação com as outras tarefas.

3.5.1. Ângulos verticalmente opostos

A ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos" é constituída por uma única tarefa e foi pensada para ser a primeira a ser proposta aos alunos, pelo que procurei que não exigisse muitos pré-requisitos e que fosse simples.

Assim sendo, esta tarefa é de natureza mais fechada e direccionada para um único conteúdo, os ângulos verticalmente opostos. Esta decisão teve também em linha de conta que seria a primeira exploração a propor aos alunos, pelo que considerei conveniente que fosse um pouco mais focada, para evitar que estes se perdessem.

Esta ficha apresenta a definição de ângulos verticalmente opostos e, pede aos alunos que construam, simplesmente, duas rectas concorrentes e procurem relações entre esses pares de ângulos. Deste modo, a tarefa foi concebida de modo a que os alunos contactassem com a definição e que através da construção de uma situação específica onde estes pares de ângulos se encontrassem, os identificassem e exemplificassem. No entanto, esta ficha pretende ir mais longe, uma vez que o seu objectivo principal é a exploração da relação existente entre estes ângulos.

Portanto, esta ficha procura que os alunos, a partir da observação de vários casos, formulassem conjecturas relativamente à congruência dos ângulos verticalmente opostos.

3.5.2. Relações entre ângulos I

Ao seleccionar a segunda ficha pretendia que esta incluísse a relação trabalhada na tarefa anterior. Para além disso, procurava ainda que seguisse um esquema semelhante ao da ficha anterior de modo que os alunos pudessem estabelecer algum paralelismo, mas que ao mesmo tempo fosse um pouco mais longe. Sendo o conteúdo seguinte a abordar os ângulos alternos internos, seleccionei uma tarefa que, tal como anterior, introduzisse a definição de ângulos alternos internos, permitindo que os alunos os identificassem e exemplificassem numa situação concreta.

No entanto, a situação não podia ser tão geral como a da tarefa anterior, visto que as relações que teriam algum interesse apenas se verificam num sistema de duas rectas paralelas intersectadas por uma secante. Como tal, a situação base da ficha é, exactamente essa, um sistema de duas rectas paralelas intersectadas por uma secante.

Assim sendo, dividi a ficha em duas questões: uma directamente relacionada com os ângulos alternos internos, em que se pretendia a identificação e exemplificação destes pares de ângulos, bem como que os alunos explorassem a relação existente entre estes ângulos na situação apresentada, ou seja, quando se têm rectas paralelas; e uma outra questão mais aberta em que se procura que os alunos explorem outras relações existentes entre os pares de ângulos da situação, que formulem e testem conjecturas e, ainda, que tentem justificá-las. Esta segunda questão possibilita, além do mais, que os alunos recorram à propriedade dos ângulos verticalmente opostos, quer através da sua identificação na situação proposta, quer por meio da sua utilização na justificação das suas conjecturas.

Por conseguinte, com esta ficha, pretendo que os alunos a partir da observação de vários casos consigam formular e testar conjecturas, relativamente à congruência de ângulos em rectas paralelas.

3.5.3. T.P.C. – Ângulos I

Esta tarefa foi construída essencialmente com duas funções, rever a classificação dos ângulos e pôr em prática as relações entre ângulos introduzidas pelas duas fichas anteriores. Para além disso, com esta ficha procurava perceber até que ponto os alunos teriam já compreendido as duas noções introduzidas pelas fichas anteriores.

Com este objectivo construí uma rede com três conjuntos de rectas paralelas para que os alunos nela identificassem os vários tipos de ângulos, solicitando, também, que fossem marcados ângulos verticalmente opostos e alternos internos. Por fim, coloquei uma última alínea, solicitando a marcação de cinco pares de ângulos congruentes. Com esta pretendia levar os alunos a relacionar de modo informal as duas propriedades já estudadas, através da transitividade da congruência, uma vez que este tipo de raciocínio seria necessário ao longo de toda a unidade.

Portanto, o objectivo desta tarefa era, por um lado, a consolidação de conhecimentos e, por outro, a introdução do tipo de raciocínio que pretendia que os alunos desenvolvessem ao longo do resto da unidade.

3.5.4. Relações entre ângulos II

Esta ficha vem no seguimento das duas primeiras e é constituída por várias questões onde se pretende que os alunos pratiquem e a aprofundem os conceitos e relações já estudados, em especial os ângulos verticalmente opostos e os alternos internos.

A primeira questão divide-se em duas alíneas. A primeira centra-se na relação entre a existência de rectas paralelas e a congruência dos ângulos alternos internos. Esta alínea pretende que os alunos comentem a veracidade de várias afirmações sobre as amplitudes de dois ângulos distintos. Deste modo, para além de procurar que os alunos recorram às propriedades estudadas, utilizando já um raciocínio de carácter dedutivo, permite também trabalhar a ideia de contradição, em especial na justificação das afirmações falsas. Enquanto isso, a segunda procura que os alunos utilizem as propriedades que conhecem para determinarem a amplitude de um ângulo, sabendo a amplitude do outro.

Por sua vez, a segunda questão é constituída por cinco alíneas que fazem apelo à utilização das várias propriedades para, a partir de ângulos conhecidos, se determinar outros ângulos, continuando assim o trabalho da segunda alínea da questão anterior. Estas alíneas estão organizadas por uma ordem crescente de dificuldade, sendo que a última alínea (2.5) possuí já um carácter problemático, necessitando da utilização de objectos geométricos auxiliares, contrariamente às restantes. Para além disto, ao pedir que expliquem a forma como obtiveram a resposta em cada alínea, pretendo que esta questão contribua, também, para que os alunos comecem a procurar elaborar cadeias dedutivas para justificarem as suas respostas, recorrendo para isso às propriedades estudadas. Por essa mesma razão, optei por utilizar amplitudes nas imagens que não correspondem às indicadas nas mesmas, com o objectivo de que o recurso ao transferidor não seja uma opção para a resolução.

Portanto, esta ficha de trabalho procura ir ao encontro das orientações programáticas, exigindo a elaboração de justificações que produzam pequenas cadeias dedutivas.

3.5.5. T.P.C. – Ângulos II

À semelhança da ficha “Relações entre ângulos II” também esta ficha tem como objectivo a consolidação dos conhecimentos dos alunos.

Assim, a primeira questão necessita de um tipo de raciocínio semelhante ao de algumas questões da ficha anterior, sendo, no entanto, um pouco mais simples do que algumas das da anterior, uma vez que esta foi pensada para ser realizada em casa e que pretendia que fosse também acessível aos alunos que pudessem ter mais dificuldades.

Por sua vez a questão 2, utiliza um tipo de raciocínio ligeiramente diferente, dado que procura que os alunos descubram o erro. Considerei que esta questão era pertinente, pois, ainda que utilizando as mesmas propriedades, implica uma compreensão diferente das relações e recorre também à contradição, indo ao encontro do trabalho realizado na ficha anterior.

3.5.6. T.P.C. – Relações entre ângulos III

Inicialmente, tinha pensado realizar e discutir em aula duas fichas diferentes, uma primeira para introduzir e trabalhar a noção de ângulo adjacente e uma segunda de aplicação de todas as propriedades e conceitos abordados no subtópico “Ângulos: amplitude e medição”, que recorreria ao contra-exemplo. No entanto, devido a constrangimentos de tempo, as duas fichas foram adaptadas de modo a puderem juntar-se e ser realizadas em casa. Deste modo, esta ficha divide-se em duas partes.

A primeira parte, correspondente à primeira questão, diz respeito exclusivamente à noção de ângulo adjacente. A ideia subjacente a esta primeira questão é que o aluno construa uma determinada noção matemática, neste caso a de ângulo adjacente, a partir da observação de conjuntos. Para tal, a tarefa seleccionada apresenta, aos alunos, um conjunto de imagens de pares de ângulos adjacentes, um conjunto de imagens de ângulos não adjacentes e um último conjunto em que se pretende que seleccionem os ângulos adjacentes, através da observação dos aspectos comuns aos diferentes exemplos antes apresentados. Assim, espera-se que os alunos construam a definição de ângulos adjacentes, atendendo às propriedades que identificaram.

A segunda parte da ficha tem como objectivo, por um lado consolidar os conhecimentos e, ao mesmo tempo, trabalhar a justificação de conjecturas falsas através do contra-exemplo. Assim, a questão é composta por várias afirmações sobre as quais o aluno deve intuir a sua veracidade, ou não, apresentando exemplos que justifiquem a sua opinião. Deste modo, esta proporciona aos alunos a possibilidade de justificarem conjecturas que não são formuladas por eles e de compreender o papel do contra-exemplo.

3.5.7. Ângulos internos de um triângulo

Esta ficha enquadra-se já no segundo subtópico. Nas primeiras tarefas o ponto de partida foi a formulação de conjecturas, no entanto, como existia a possibilidade de os alunos já terem, anteriormente, tomado contacto com o resultado da soma dos ângulos internos de um triângulo, procurei que tivessem agora contacto com outra faceta do raciocínio matemático. Assim, seleccionei e adaptei uma tarefa a partir da qual os alunos poderiam demonstrar que a soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180º, utilizando as propriedades dos ângulos trabalhadas nas tarefas anteriores. Uma vez que pretendia que os alunos elaborassem a demonstração da forma mais autónoma possível, optei por dividir a tarefa em várias questões.

A primeira questão tem como objectivo chamar a atenção dos alunos para a existência de um ângulo raso formado pela soma de três ângulos. Por sua vez, a segunda pedia que os alunos identificassem pares de ângulos na figura e justificassem, de modo a que relacionassem os ângulos que formavam o ângulo raso com os ângulos do triângulo, utilizando as propriedades estudadas. A terceira questão pretende que os alunos olhem para as duas questões anteriores e que estabeleçam que a soma da amplitude dos ângulos internos de um triângulo é 180º. Por fim, a última questão tem como objectivo levar os alunos a compreender a generalidade do raciocínio que desenvolveram nas questões anteriores, ou seja, que este não depende da forma particular do triângulo considerado.

3.5.8. Triângulos

No seguimento da ficha anterior, esta procura que os alunos pratiquem os conteúdos estudados de modo a consolidar os seus conhecimentos.

Assim, a primeira questão foi pensada para aplicação directa da propriedade anterior, enquanto, por sua vez, a segunda relaciona a soma dos ângulos alternos internos com as restantes propriedades estudadas. Incluí ainda uma outra questão com um grau dificuldade mais elevado e que apela a todos os conteúdos anteriores. Esta questão foi pensada para trabalhar a justificação, recorrendo a um raciocínio dedutivo. Todavia, pretende levar os alunos um pouco mais longe, na medida em que a sua resolução não é imediata, necessitando que estabeleçam uma estratégia de resolução, pelo que tem já um carácter problemático, sem exigir mais conhecimentos.

Esta ficha foi então elaborada tendo em vista a consolidação de conhecimentos.

3.5.9. Ângulos externos de um triângulo

Os ângulos externos de um triângulo eram, à partida, um conteúdo novo para os alunos, pelo que procurei que a ficha de trabalho regressasse ao formato das primeiras tarefas, ou seja, introduzia o conceito e permitia a exploração de relações. Apesar de existirem duas relações fundamentais, a amplitude de um ângulo externo como soma de dois internos não adjacentes e a soma dos ângulos externos, a tarefa seleccionada apenas pretende explorar a primeira propriedade. Para orientar a exploração, favorecendo o estabelecimento de conjecturas, a ficha é constituída por três questões que pretendem auxiliar o aluno no seu trabalho. A primeira questão sugere a exploração da relação entre um ângulo externo específico e os dois internos não adjacentes e, dado que esta relação implica mais do que a simples observação dos dados (é necessário manipula-los), incluí uma tabela, com o objectivo de ajudar os alunos a organizar os dados. A ficha inclui uma segunda questão que pretende conduzir à observação do que se verifica com um outro ângulo externo, de modo a ajudar o aluno a compreender quais os ângulos envolvidos. A última questão é a síntese das anteriores, ou seja, corresponde à formulação e justificação da conjectura.

Portanto, esta ficha de trabalho tem por objectivo que os alunos compreendam o que é um ângulo externo e de que forma se relaciona com os internos, recorrendo à formulação, teste e justificação de conjecturas.

3.6. *As aulas leccionadas*

A planificação das aulas leccionadas neste estudo foi elaborada de forma faseada. Assim, embora inicialmente tivesse realizado uma planificação de todas as aulas da unidade, esta foi sendo ajustada em virtude do modo como decorreram as aulas que foram sendo leccionadas e que foram condicionando as que se lhes seguiram. Deste modo, a análise dos planos de aula elaborados e que se encontram em anexo, deverá ter em conta este factor. Tal como é possível compreender analisando a sequência de aulas planificadas, a maioria das aulas desta intervenção não decorreu exactamente de acordo com o planeado.

De modo a clarificar e justificar as opções tomadas e as estratégias e tarefas seleccionadas, tendo em conta os conteúdos a abordar e os objectivos a atingir, apresento, em seguida, cada uma das aulas, começando por, em cada uma, expor o plano inicial e apresentando, seguidamente, uma síntese dessa mesma aula comparando-a com a que foi a planeada inicialmente.

3.6.1. Primeira aula (26 de Abril de 2011)

Dado que esta era a primeira aula, era, por conseguinte, fundamental introduzir as noções que seriam necessárias ao longo da unidade. Como tal, uma das noções a considerar seria a de congruência, pois como só este ano os alunos integraram o Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007) esta terminologia era-lhes desconhecida. Por outro lado era, também, importante rever alguns dos conteúdos estudados nos anos anteriores e que seriam utilizados, com alguma frequência, ao longo da unidade, de modo a que todos os intervenientes das aulas se conseguissem entender. Deste modo era, então, necessário rever o conceito de ângulo e a sua classificação.

Assim, pensei numa introdução que partisse de uma imagem da realidade onde fossem, claramente, visíveis vários tipos de ângulos e que permitisse explorar a noção de ângulo, a congruência de ângulos e classificação de ângulos. Para tal, planifiquei utilizar um ficheiro *GeoGebra* (Figura 23), a partir do qual colocaria aos alunos questões que lhes permitissem compreender as noções em causa.

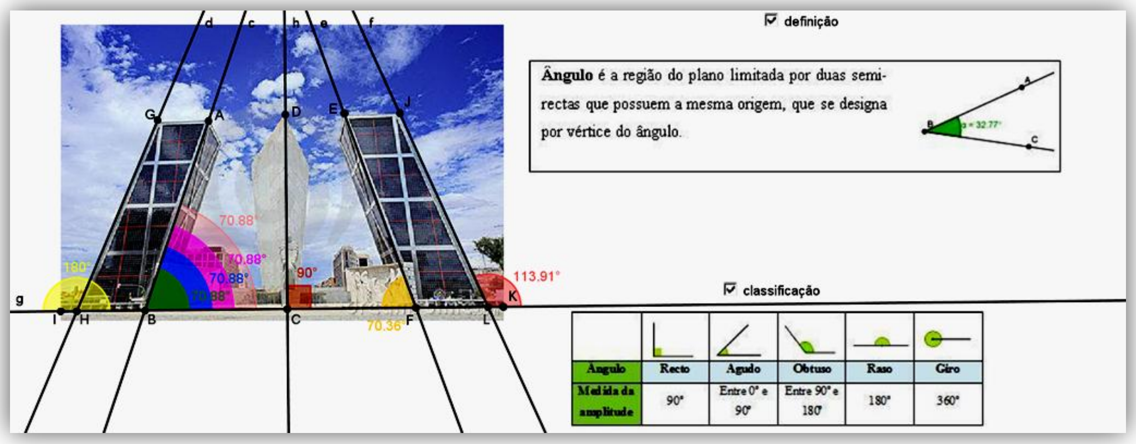


Figura 23 – Ficheiro *GeoGebra* para a introdução do conceito de ângulo.

Existindo vários conteúdos para trabalhar, planifiquei esta aula de modo a introduzir duas relações entre ângulos, que seriam fundamentais no decorrer da unidade: ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos. Ao mesmo tempo, pretendia, também, que os alunos tivessem oportunidade de realizar experiências e formular e testar conjecturas. Atendendo a estes objectivos, seleccionei para esta aula as duas primeiras fichas.

A primeira a propor aos alunos seria então a ficha de trabalho “Ângulos verticalmente opostos”. Uma vez que, o objectivo do meu estudo visa o raciocínio matemático, pretendia, também, que os alunos se familiarizassem com o processo de demonstração, pelo que optei por introduzir na discussão desta tarefa a demonstração de que os ângulos verticalmente opostos são congruentes, visto não exigir grandes pré-requisitos e nem necessitar, praticamente, de artifícios, sendo portanto ideal para uma primeira abordagem.

A seguir, dado que pretendia ainda abordar os ângulos alternos internos seleccionei para esta aula também a ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”. No entanto, ao analisar o tempo disponível, pareceu-me que este não seria suficiente para que os alunos pudessem investigar, convenientemente, todas as relações envolvidas, pelo que planeei que nesta aula se realizaria, apenas, a primeira parte desta segunda ficha, correspondente aos ângulos alternos internos.

Para definir os recursos a utilizar na aula, analisei as tarefas seleccionadas e os objectivos das mesmas, de modo a verificar o que mais se adequava e se seria necessário proceder a alguma alteração. Assim, como as tarefas implicavam que os alunos observassem e testassem vários casos, pareceu-me que o *GeoGebra* seria o recurso mais indicado. Para além disto, seleccionei também o quadro interactivo para os momentos de discussão, uma vez que aliado ao *GeoGebra*, seria um elemento que, à partida, facilitaria a apresentação das conjecturas por parte dos alunos, assim como a discussão das mesmas, sendo uma mais-valia para estes momentos.

Para além das tarefas anteriores, seleccionei, ainda, para esta aula uma última tarefa, constituída por algumas questões do manual que contemplavam aspectos mais rotineiros, com o objectivo de consolidar os conteúdos introduzidos e que, simultaneamente, permitisse aos alunos inteirassem da utilização das propriedades e que produzissem pequenas cadeias dedutivas.

Portanto, procurei planificar esta primeira aula de modo a introduzir os conceitos e relações que seriam fundamentais para o desenrolar da unidade. No entanto, este plano não foi integralmente cumprido no decorrer da aula, não tendo sido possível cumprir todos os objectivos estabelecidos.

O início da aula não decorreu tal como havia sido planeado, uma vez que como era a primeira aula da minha intervenção e, simultaneamente, a primeira do 3.º período, foi necessário alterar a planta da sala de modo a formar os pares de trabalho, atrasando, assim um pouco a aula relativamente ao previsto.

A revisão dos conteúdos também levou bastante mais tempo do que o planeado, devido, entre outras coisas, a alguns problemas de ordem técnica. Assim, ao tentar não atrasar tanto a planificação acabei por me esquecer de introduzir a notação de ângulo.

Deste modo, a realização da ficha de trabalho acabou por se iniciar apenas perto do fim dos primeiros 45 minutos da aula, como tal dificilmente conseguiria cumprir o plano de aula na sua totalidade. Para além disto, o ritmo da turma não foi de todo homogéneo na realização da tarefa. Muitos alunos demonstraram alguma dificuldade na realização da mesma, em especial a elaborar a construção pedida, pois não tinham tido ainda muitas oportunidades de trabalhar com o *GeoGebra*, não se recordando de alguns aspectos relativos à sua utilização. Ao mesmo tempo, os alunos sentiram também dificuldades em compreender o que se pretendia com a tarefa. Deste modo, para que houvesse um maior número de alunos a encontrar a relação existente e a formular alguma conjectura, optei por conceder bastante mais tempo do que o que tinha previsto para a realização da tarefa.

Assim sendo, apenas foi possível realizar a discussão da tarefa. No entanto, como estava bastante atrasada, algumas das questões que surgiram durante a discussão não foram tão aprofundadas como deveriam de ter sido, nomeadamente acabei por não insistir tanto quanto seria necessário que os alunos justificassem as suas conjecturas. Apesar de tudo, foi ainda possível a demonstração da propriedade em causa.

Desta forma, o plano de aula estabelecido não foi cumprido, tendo ficado por realizar a parte da aula que seria dedicada aos ângulos alternos internos, pelo que os objectivos propostos também não foram totalmente concretizados.

3.6.2. Segunda aula (28 de Abril de 2011)

Dado que não tinham sido cumpridos todos os objectivos propostos para a primeira aula, foi necessário integrá-los nesta aula. Assim, planifiquei esta aula de modo a trabalhar os ângulos alternos internos e as relações existentes entre os ângulos num sistema de duas paralelas intersectadas por uma secante. Para além disto, pretendia ainda que os alunos realizassem alguma prática com os conceitos e relações já introduzidos.

Deste modo, planeei realizar a segunda ficha de trabalho ("Relações entre ângulos I") preparada para a aula anterior. Nesta aula, no entanto, planifiquei realizar a tarefa na sua totalidade, incluindo, por conseguinte, a exploração das várias relações existentes num sistema de duas rectas paralelas intersectadas por uma secante. Para além disso, atendendo às dificuldades que tinham surgido na aula anterior, resolvi alterar um pouco o plano de realização da tarefa. Como tal, optei por, após distribuir a tarefa e antes de iniciar a sua resolução, explorar com os alunos o conceito de ângulos alternos internos. Apesar de manter o recurso ao *GeoGebra* e ao quadro interactivo para esta tarefa, optei por fornecer aos alunos o ficheiro com a construção, de modo a permitir que se concentrassem, essencialmente, nas relações existentes.

Para além disto, seleccionei, também, para esta aula a realização da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". Portanto, neste segunda aula procurei que os alunos explorassem as relações existentes entre duas rectas paralelas e que consolidassem os conteúdos já trabalhados.

A primeira parte da aula não diferiu muito do que estava previsto, em especial em relação ao tempo. Apesar disso, devido a algumas dúvidas que surgiram, optei por dedicar um pouco mais de atenção à revisão do conceito de ângulos verticalmente opostos, não tendo, no entanto, retomado, a questão dos ângulos verticalmente opostos em rectas perpendiculares, como estava planeado. Na introdução da ficha demorei um pouco mais do que o planeado, uma vez que me pareceu necessário que os alunos compreendessem bem a definição de ângulos alternos internos.

No entanto, foi na realização da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I" que a aula se afastou verdadeiramente do que havia sido planeado ao nível do tempo. Por um lado, apesar de a construção já estar realizada e de a ter já ter assinalado durante a explicação os pares de ângulos alternos internos, vários alunos demonstraram algumas dificuldades nesta primeira parte da tarefa. Ao mesmo tempo, na segunda questão os alunos mostraram-se entusiasmados na procura de relações, desejando procurar mais. Para além disso, o próprio processo de formulação de conjecturas foi também demorado. Deste modo acabei por deixar que a resolução da ficha se prolongasse durante muito mais tempo do que o previsto, de modo a possibilitar que os alunos tivessem oportunidade de formular e explorar algumas conjecturas. Assim sendo, em vez dos 10 minutos planeados, foi dedicada à realização da ficha mais de meia hora. Por conseguinte, a aula sofreu um grande atraso, tendo sido apenas possível realizar a discussão da primeira questão da ficha relativamente aos ângulos alternos internos.

Deste modo, para além da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II", ficou ainda por realizar a discussão das outras relações existentes num sistema de rectas paralelas cortadas por uma secante. Apesar disso, dos objectivos propostos para esta aula apenas um deles não foi de todo conseguido: raciocinar dedutivamente.

3.6.3. Terceira aula (3 de Maio de 2011)

Dado que a planificação da aula anterior não foi completamente cumprida, esta terceira aula teria de ter isso em consideração. Ao mesmo tempo, havendo mais um tópico a leccionar, e tempo a gerir, era importante terminar o tópico "Ângulos: amplitude e medição" nesta aula. Ao mesmo tempo, seria importante proporcionar aos alunos oportunidades de utilizarem as propriedades estudadas na elaboração de justificações, visto que isto seria necessário para as aulas seguintes. Para além disso, pretendia também introduzir dois conceitos com os quais os alunos já tinham vindo a trabalhar, de forma informal: os ângulos complementares e suplementares. Deste modo, optei por realizar, nesta aula, as fichas de trabalho que estavam previstas para as aulas anteriores, concluindo então a planificação pendente.

Inicialmente, pensei em dividir a aula em duas partes: a discussão da segunda parte da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I" e a realização da ficha "Relações entre ângulos II". No entanto, ao analisar a resolução da ficha enviada para trabalho de casa na 1.ª aula ("Ângulos I"), encontrei alguns erros, em especial, referentes à noção de ângulos verticalmente opostos, pelo que decidi que seria importante dar algum feedback oral aos alunos, com o objectivo de esclarecer algumas confusões existentes. Posto isto, precisava então planear de que forma o fazer. Escolhi elaborar uma apresentação de PowerPoint com extractos das resoluções dos alunos, umas correctas outras nem tanto, de modo a que pudessem compreender quais os erros cometidos e a sua razão e, ao mesmo tempo, tivessem uma ideia de como os poderiam corrigir. A escolha deste recurso deveu-se ao facto de que a reprodução da imagem no quadro seria mais demorada e complexa, dificultando a apresentação de várias resoluções. Para esta apresentação, optei ainda por utilizar o *DataShow*, visto ser o recurso que teria disponível na sala e que me permitiria a projecção da apresentação preparada.

De seguida, procurei, então, integrar a planificação da aula anterior, pelo que decidi começar com a realização da discussão da última questão da tarefa da aula anterior (Relações entre ângulos I). Para a discussão optei, então, por seleccionar apenas três conjecturas que sintetizavam as diferentes explorações realizadas pelos alunos. Sendo objectivo deste trabalho o raciocínio matemático e, por conseguinte, a justificação de conjecturas, procurei, também, ao planificar esta discussão, contemplar a justificação destas conjecturas.

Nesta aula pretendia ainda abordar o conceito de ângulos suplementares e o de ângulos complementares. Uma vez que existia algum constrangimento, relativamente, ao tempo e que estas definições correspondiam a propriedades já conhecidas e utilizadas, seleccionei duas questões da ficha de trabalho ("Relações entre ângulos II") que contemplavam estes conceitos para os referir.

Portanto, a planificação desta aula procurou continuar o trabalho com as relações entre ângulos e fornecer aos alunos as ferramentas necessárias para as aulas seguintes.

A primeira parte da aula, correspondente à correcção da ficha "T.P.C. – Ângulos I", não se afastou muito do que tinha previsto. No entanto, a discussão da questão 3 demorou mais tempo do que o planeado, uma vez que procurei que os alunos tivessem um papel activo na construção das justificações das conjecturas apresentadas, para além de que lhes solicitei que registassem tanto as conjecturas como as justificações.

Na resolução da questão 1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II" os alunos sentiram muitas dificuldades, tendo passado o tempo previsto para a realização dessa questão sem que a maioria tivesse conseguido resolvê-la ou mesmo compreendê-la. Como tal, optei por parar a resolução e discutir a primeira afirmação com a turma, de modo a ajudar os alunos a compreenderem o que se pretendia. Após esta pequena discussão, voltei então a dar mais um pouco tempo para que tentassem agora resolver as questões em falta.

Dado que a aula já estava bastante atrasada e ainda pretendia introduzir os conceitos de ângulos suplementares e complementares, optei por fazer uma outra alteração ao planeado, discutindo apenas a questão 1.1.2 e passando logo para a realização da alínea 2.1 em grande grupo.

Uma vez que já não restava muito tempo de aula e que um aluno já tinha referido antes os conceitos de ângulos suplementares, optei por utilizar a alínea 2.1 para introduzir estes conceitos pedindo a participação do aluno que já tinha demonstrado saber as noções em causa.

Como não foi possível realizar todas as questões da ficha de trabalho na aula, resolvi pedir aos alunos que as terminassem em casa.

Apesar de não ter conseguido cumprir integralmente o plano elaborado para esta aula, penso que os objectivos estabelecidos para esta aula foram conseguidos.

3.6.4. Quarta aula (5 de Maio de 2011)

Nesta aula tinha como objectivo introduzir a soma dos ângulos internos do triângulo, pretendendo, simultaneamente, que os alunos trabalhassem a demonstração. Apesar disso, optei na planificação por iniciar a aula pela discussão de algumas questões da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II" que tinham ficado pendentes na terceira aula, visto que possibilitavam a utilização de diferentes estratégias de resolução, bem como de pequenas cadeias dedutivas, sendo por conseguinte uma mais-valia para o trabalho que pretendia realizar nesta aula.

Após este momento, planifiquei a realização da ficha de trabalho "Ângulos internos de um triângulo". Uma vez que esta ficha não contemplava o trabalho experimental, ou seja, não pretendia a formulação de conjecturas, optei por introduzir a tarefa, utilizando exemplos de vários triângulos construídos por mim, de modo a possibilitar que a demonstração surgisse a partir de conjecturas formuladas pela turma, pois, como refere Veloso (1998), a demonstração deve, sempre que possível, surgir das conjecturas dos alunos, para além de que assim garantiria que todos conheceriam a propriedade que se queria provar. Uma vez que esta tarefa não implicava, necessariamente, a realização de experiências por parte dos alunos considerei que a utilização do *GeoGebra* não seria vantajosa para a concretização dos objectivos, como tal escolhi não o utilizar nesta aula.

Tendo demonstrado a propriedade, considerei que seria indicado que os alunos contactassem com a sua utilidade, praticando, pelo que optei por seleccionar ainda para esta aula a realização da ficha "Triângulos".

Portanto, esta aula foi concebida com o objectivo de trabalhar os ângulos internos de um triângulo e o raciocínio dedutivo.

Para o início desta aula estava planeado a discussão das questões em falta, no entanto, esta discussão demorou muito mais tempo do que o planificado. Assim, uma vez que o principal objectivo desta aula era a soma dos ângulos internos de um triângulo, optei por interromper esta discussão deixando pendentes as alíneas 2.4 e 2.5, pois as questões discutidas davam já aos alunos uma ideia do tipo de raciocínio utilizado. Continuei seguindo o plano da aula, com a introdução da soma dos ângulos internos de um triângulo.

Na resolução da ficha de trabalho surgiram algumas dificuldades que não permitiram que este momento da aula fosse mais rápido. Apesar disso, foi ainda possível iniciar a discussão da ficha do trabalho. Todavia, devido ao atraso inicial da aula e às dificuldades surgidas na resolução da ficha, esta discussão foi realizada um pouco à pressa, não se tendo conseguido chegar a discutir a última questão da ficha.

Portanto, os objectivos definidos para esta aula não foram totalmente atingidos, tendo ficado também por realizar a ficha de trabalho "Triângulos".

3.6.5. Quinta aula (10 de Maio de 2011)

Esta aula destinava-se, inicialmente, aos ângulos externos de um triângulo, mais precisamente à relação entre estes e os internos. No entanto, uma vez que a planificação da quarta aula não foi cumprida na sua totalidade, não se atingindo todos os objectivos tornou-se necessário introduzir algumas alterações nesta aula.

Deste modo, planeei iniciar a aula pela discussão da tarefa "Ângulos internos de um triângulo", visto que a propriedade seria necessária para a concretização dos objectivos desta quinta aula. Seguidamente, optei por propor a realização da ficha de consolidação deste conteúdo ("Triângulos"), embora devido à falta de tempo tenha escolhido não realizar a questão 3, uma vez que pretendia ir um pouco mais além. Além disto, optei também por realizar a primeira questão em grande grupo, para possibilitar que os alunos com mais algumas dificuldades compreendessem o que estava em causa.

Após esta primeira parte da aula, planeei abordar então os ângulos externos de um triângulo. Para tal, seleccionei para esta aula a ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo". Devido à natureza da tarefa e ao facto de exigir que se experimentem vários triângulos optei por utilizar o *GeoGebra* para a sua realização, uma vez que, para além disso, o objectivo do trabalho a propor aos alunos não era a construção do triângulo, mas sim a comparação entre os ângulos de vários triângulos. Por esta mesma razão, escolhi fornecer aos alunos um ficheiro com a construção já realizada.

Portanto, esta aula foi planeada com o objectivo de consolidar a soma dos ângulos internos de um triângulo e de formular, testar e demonstrar conjecturas relativas à relação entre os ângulos internos e externos de um triângulo.

Seguindo o plano de aula, esta quinta aula iniciou-se pela discussão da ficha "Ângulos internos de um Triângulo", no entanto, esta demorou um pouco mais do que o previsto, tendo optado por não colocar algumas das questões pensadas para este momento.

Por sua vez, a resolução da questão 2 da ficha de trabalho foi bastante heterogénea, ou seja, enquanto alguns pares de alunos terminaram a questão muito rapidamente, outros sentiram algumas dificuldades, pelo que necessitaram de mais tempo do que o previsto. Como tal, optei por prolongar o tempo de resolução da questão, de modo a conseguir dar assistência aos alunos com mais dificuldades e que estes tivessem também a oportunidades de resolver algumas questões por si. Assim sendo, propus aos alunos que iam terminando que tentassem resolver a questão 3.

Deste modo, foi apenas possível introduzir a noção de ângulo externo e que os alunos realizassem a ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo", tendo ficado por realizar a discussão da tarefa.

Portanto, os objectivos não foram cumpridos na totalidade, faltando especialmente a demonstração de conjecturas. Dado que não foi possível cumprir o plano de aula, optei por alterar o trabalho de casa pedindo, em alternativa, aos alunos que realizassem a questão 6 da página 39 do manual.

3.6.6. Sexta aula (12 de Maio de 2011)

O objectivo desta sexta aula prendia-se com a soma dos ângulos externos de um triângulo. Ao mesmo tempo, pretendia que os alunos formulassem, testassem e demonstrassem conjecturas relacionadas com o tema. Para além disto, sendo esta a última aula era também necessário realizar a discussão de algumas tarefas pendentes, nomeadamente de alguns trabalhos de casa de aulas anteriores. Deste modo, planifiquei a aula de modo a dividi-la, essencialmente, em três partes.

A primeira parte seria destinada à discussão da tarefa da aula anterior, que não tinha, ainda, sido realizada. Atendendo ao objectivo do meu estudo, para discussão desta tarefa, planeei, além da apresentação e discussão de algumas conjecturas formuladas, pedir aos alunos a realização, a pares, de uma pequena demonstração da propriedade válida, com o objectivo de procurar perceber até que ponto compreendiam o que era uma demonstração e que dificuldades revelavam, discutindo-a, em seguida, em grande grupo.

Por sua vez, a segunda parte da aula, corresponderia à soma dos ângulos externos de um triângulo. Inicialmente, pensei em seleccionar uma ficha de trabalho que permitisse aos alunos explorar e formular, testar e demonstrar a conjectura relativa a esta propriedade. No entanto, tendo notado nas últimas aulas algum cansaço por parte dos alunos relativamente à realização de fichas de trabalho, optei por não propor nenhuma nesta aula. Em vez disso, planeei utilizar o *GeoGebra* e o quadro interactivo, para dinamizar em grande grupo a discussão da propriedade, utilizando as potencialidades destes dois recursos, para que os alunos formulassem conjecturas e construíssem uma demonstração da propriedade.

Por fim, a última parte da aula consistiria na discussão das tarefas pendentes. Uma vez que se tratava da última aula que ia leccionar, o meu objectivo principal era conseguir terminar o trabalho a que me proponha relativamente aos ângulos externos.

Seguindo a planificação elaborada, a aula iniciou-se pela discussão das conjecturas da ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo". No entanto, visto que, ao fazer um levantamento das conjecturas dos alunos, não me deparei com nenhuma inválida, optei por passar directamente para a conjectura que interessava.

Ao solicitar aos alunos que procurassem demonstrar a conjectura, surgiram diversas dificuldades, pelo que a aula sofreu um atraso relativamente ao planeado. Para além disso, uma vez que um dos alunos conseguiu elaborar a demonstração do resultado, a discussão realizou-se a partir dela. Na procura da demonstração surgiu ainda uma situação construída por um aluno que conduzia a um absurdo. Resolvi, assim, alterar a planificação e discuti-la com a turma, dado que este é também um importante método de demonstração e as orientações curriculares referem que ao longo da sua escolaridade os alunos devem de contactar com os diversos métodos de demonstração. Assim sendo, esta parte da aula, acabou por utilizar bastante mais tempo do que o previsto inicialmente.

Na discussão do valor da soma da amplitude dos ângulos externos de um triângulo, acabei por não realizar tantas experiências, nem registar muitos valores, visto que os alunos intuíram a propriedade, praticamente, logo no momento, e formularam a conjectura. Assim, optei por continuar para a prova da demonstração pedindo a participação dos alunos.

Devido a alguns atrasos em todo o trabalho a discussão das tarefas anteriores, acabou por se limitar à primeira parte da ficha "Relações entre ângulos III", correspondente aos ângulos adjacentes. Portanto, não foi possível cumprir tudo o que se tinha planeado. Não obstante, penso que os objectivos gerais da aula foram alcançados.

4. Métodos de recolha de dados

Uma vez que o presente estudo pretende ser um estudo de carácter investigativo, a selecção de métodos de recolha de dados é, também, uma fase necessária e importante do trabalho realizado.

Ao longo do presente estudo, tive de desempenhar, simultaneamente, dois papéis, por um lado, o de investigadora e, por outro, o de professora, uma vez que a leccionação das aulas em questão esteva a meu cargo.

Assim, os métodos de recolha de dados foram pensados de modo a que nenhum dos papéis comprometesse o outro, uma vez que tanto a recolha dos dados poderia pôr em causa o meu papel enquanto professora, como vice-versa.

Para além disto, foi tido, também, em linha de conta o facto de ser um estudo essencialmente qualitativo e que, como tal, é recomendado que a recolha de dados não se limite a um único de método (Bogdan & Biklen, 1994).

Deste modo, foram utilizados essencialmente dois métodos de recolha de dados: a recolha documental e a observação com registo vídeo e áudio.

Para as gravações foram atempadamente solicitadas as autorizações ao conselho executivo da escola e aos Encarregados de Educação (Anexo III)

4.1 Recolha documental

A recolha documental, neste caso, baseou-se, essencialmente, na recolha das resoluções escritas das tarefas realizadas pelos alunos, tanto em aula como em casa. Com a análise das tarefas realizadas pelos alunos pretendia perceber as estratégias que utilizam, as suas conjecturas e o caminho que seguem tanto para as formular como para as testar, bem como algumas dificuldades que pudessem sentir. Ao mesmo tempo, desejava também realizar alguma comparação entre as tarefas, uma vez que me possibilitaria uma análise do raciocínio matemático e um ponto de vista mais evolutivo.

Numa primeira fase, analisei todas resoluções dos alunos de modo a poder ter uma ideia geral do trabalho realizado. Atendendo a essa análise preliminar, considerei que seria importante seleccionar para uma análise mais aprofundada tarefas nas quais os alunos tivessem tido oportunidade de formular e testar conjecturas. Deste modo, escolhi as fichas de trabalho “Ângulos verticalmente opostos”, “Relações entre ângulos I” e “Ângulos externos de um Triângulo”.

Uma das razões que me levou a seleccionar a ficha de trabalho “Ângulos verticalmente opostos” foi o facto de ter sido a primeira tarefa a ser proposta aos alunos, no âmbito deste estudo, que implicava a formulação de conjecturas. Assim sendo, considerei que seria um bom ponto de partida, uma vez que possibilitaria fazer um diagnóstico de como os alunos reagiam a este tipo de raciocínio.

Dado que a ficha “Relações entre ângulos I” tem uma parte de carácter mais aberto do que a maioria das tarefas propostas (questão 3), possibilitaria que os alunos fizessem explorações mais diversificadas e com diferentes abordagens. Como tal, considerei que seria pertinente que esta questão fosse alvo de uma análise mais aprofundada, o que foi reforçado pelo facto de ter visto que as resoluções dos alunos mostravam várias abordagens. Para além disso, a maioria das relações existentes eram possíveis de justificar a partir dos resultados conhecidos pelos alunos, aplicando o raciocínio dedutivo. Considerei também importante analisar a questão 2 desta ficha, uma vez que sendo o tipo de raciocínio em causa semelhante ao da ficha “Ângulos verticalmente opostos”, seria uma forma de observar o progresso dos alunos neste aspecto.

A selecção da ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo” prendeu-se com o facto de a propriedade que se pretendia estudar com esta ficha não depender da simples observação dos dados, mas implicar a sua manipulação. Para além disso, também o teste de conjecturas poderia ter um tratamento diferente, uma vez que não bastaria testar com vários triângulos distintos, mas seria também necessário ver o que acontecia com os vários ângulos externos. Assim sendo, optei por englobar esta tarefa na análise de dados, visto que me possibilitava contactar com a forma como os alunos lidavam com este tipo de conjecturas, nomeadamente, como generalizavam a relação para qualquer ângulo externo em qualquer triângulo. Simultaneamente, a escolha desta ficha de trabalho deveu-se, também, ao facto de a sua discussão ter sido um ponto de partida para os alunos trabalharem a demonstração matemática.

Além das fichas de trabalho já referidas, voltadas para a formulação de conjecturas, considerei para analisar neste estudo uma outra tarefa, que consistiu numa questão do manual que os alunos resolveram em casa. A escolha desta tarefa prendeu-se, essencialmente com o facto de esta ter permitido aos alunos utilizarem os vários conteúdos abordados ao longo da unidade, com a excepção dos ângulos externos. Para além disso esta questão era uma oportunidade para os alunos elaborarem justificações, pelo que considerei que seria interessante verificar se estas justificações apresentariam já um carácter dedutivo.

4.2 Observação com registo vídeo e áudio

Uma vez que o objectivo deste estudo se prende com o Raciocínio Matemático era importante procurar recolher dados que me permitissem ter, pelo menos, uma ideia de como os alunos raciocinam matematicamente. Assim sendo, como nem sempre as resoluções escritas dos alunos revelam todos os raciocínios e estratégias que estes utilizam, considerei que, para uma melhor análise, seria necessário recorrer a outros métodos de recolha de dados.

Atendendo às estratégias de ensino adoptadas neste estudo, os momentos de discussão em grande grupo seriam fundamentais, uma vez que possibilitariam que os alunos argumentassem as suas ideias, justificassem as suas conjecturas. Para além disso seria nesses momentos que se pretendia também trabalhar a demonstração. Como tal seriam, à partida, momentos ricos para o analisar o raciocínio matemático. Deste modo, considerei que a observação com registo vídeo das aulas e, em especial, destes momentos, possibilitar-me-ia a análise de dados importantes para responder à minha problemática.

O trabalho autónomo dos alunos implicava, de acordo com o apresentado no capítulo 3, a formulação e o teste de conjecturas, entre outras vertentes do Raciocínio Matemático. Deste modo, para o presente estudo era também importante conseguir compreender estes momentos. Deste modo, optei por recorrer à gravação áudio do trabalho realizado por três pares de alunos.

A escolha dos três pares procurou ter em linha de conta o desempenho dos alunos na disciplina de Matemática, bem como a sua participação nas aulas e o tipo de estratégias que normalmente apresentam na resolução das tarefas propostas.

A Andreia e o Daniel são dois alunos excelentes a Matemática, tendo ambos obtido nível 5 no final do 2.º Período. O Daniel é um aluno habitualmente muito participativo e que expõe as suas dúvidas. Por sua vez, a Andreia é um pouco mais tímida, mas as suas participações são habitualmente muito pertinentes e ricas. Para além disto, estes alunos já tinham trabalhado juntos numa outra ocasião, juntamente com um terceiro aluno, tendo na altura realizado um trabalho muito positivo em que tinham trocado opiniões e trabalhado colaborativamente.

Outro par seleccionado foi o Bernardo e o Tomás. Apesar de terem tido uma avaliação ligeiramente inferior à Andreia e ao Daniel, nível 4 no 2.º Período, estes alunos costumam ter uma participação bastante activa nas aulas de Matemática, em especial o Bernardo. Para além disso, ao longo do ano apresentaram algumas estratégias e resoluções bastante criativas com raciocínios diferentes. Este par de trabalho já tinha trabalhado em conjunto durante o 2.º Período entendendo-se muito bem.

Para o último par, procurei escolher alunos que apresentassem mais algumas dificuldades na disciplina de Matemática. Assim, optei por seleccionar o Rodrigo e a Daniela, apesar de anteriormente nunca terem trabalhado em conjunto na aula de Matemática. A avaliação destes dois alunos no 2.º Período foi de nível 3. Apesar disso, o Rodrigo é um aluno que ao longo do ano tem tido uma participação nas aulas bastante positiva, apresentando muitas vezes raciocínios bastante interessantes. Já, a Daniela é uma aluna bastante tímida não participando muito na aula e fazendo por vezes algumas confusões. Deste modo, mesmo sendo alunos com classificações semelhantes, não são propriamente idênticos, pelo que considerei que a troca de ideias entre os dois poderia fornecer dados interessantes para o estudo, visto que são ambos alunos esforçados.

Uma vez que o presente estudo tem por objectivo o raciocínio matemático, procurou-se que a análise de dados se guiasse pelas orientações definidas pelo Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007). No entanto, sendo este um estudo baseado em apenas seis aulas, nem todos os objectivos e orientações do programa foram abordados no decurso do mesmo. Assim sendo, das orientações programáticas para o 3.º ciclo seleccionaram-se os seguintes objectivos específicos e notas:

- Formular, testar e demonstrar conjecturas.
- Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples.
- Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo.
- Compreender o papel das definições em matemática.
- Pedir aos alunos para identificar casos particulares, formular generalizações e testar a validade dessas generalizações.
- Proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjecturas a partir de dados obtidos

na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjecturas).

- Pedir a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos, ou contra-exemplos (ME, 2007, p. 64).

Tópicos	**Objectivos específicos**	**Notas**
Raciocínio matemático • Formulação, teste e demonstração de conjecturas • Indução e dedução • Argumentação	• Formular, testar e demonstrar conjecturas. • Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples. • Identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo. • Compreender o papel das definições em matemática. • Distinguir uma argumentação informal de uma demonstração. • Seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração.	• Pedir aos alunos para identificar casos particulares, formular generalizações e testar a validade dessas generalizações. • Proporcionar situações em que os alunos raciocinem indutivamente (formulando conjecturas a partir de dados obtidos na exploração de regularidades) e dedutivamente (demonstrando essas conjecturas). • Salientar o papel das definições na dedução de propriedades, por exemplo no estudo dos quadriláteros. • Realizar uma pesquisa histórica sobre os Elementos de Euclides e a organização axiomática desta obra. Salientar os significados de axioma, teorema e demonstração. Analisar a demonstração da primeira proposição dos Elementos. • Fazer referência à análise exaustiva de casos e à redução ao absurdo como métodos de demonstração. • Pedir a fundamentação de afirmações através de conceitos, propriedades ou procedimentos matemáticos, ou contra-exemplos.

Quadro 3 – Tópicos e objectivos específicos do raciocínio matemático no 3.º ciclo (ME, 2007, p. 64).

5. Análise de Dados

Ao longo deste capítulo procurarei apresentar e analisar alguns dos dados recolhidos, tendo por base as questões formuladas neste estudo.

Deste modo, analisarei o trabalho realizado pelos alunos em quatro fichas de trabalho, recorrendo tanto a produções escritas como a extractos de diálogos dos pares e em grande grupo. Para além disto, analisarei também alguns momentos da última aula.

5.1. Ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos"

O objectivo principal desta primeira ficha, no que diz respeito ao raciocínio matemático, era proporcionar aos alunos a oportunidade de formularem e testarem conjecturas. Para tal pretendia-se que explorassem e investigassem as relações entre os ângulos formados por duas rectas concorrentes, mais precisamente entre os ângulos verticalmente opostos. Foi solicitado aos alunos o registo de alguns exemplos de explorações, de modo a, por um lado, orientá-los na formulação de conjecturas e, por outro, possibilitar uma melhor compreensão da actividade realizada.

A definição de ângulos verticalmente opostos era, assim também um objectivo desta ficha, tendo esta sido colocada na ficha. Ao introduzir a tarefa, todavia, não foi mencionada esta definição nem o que era pretendido da ficha, apenas foi entregue o enunciado e referido que era para ser realizada a pares utilizando o *GeoGebra*.

Ao acompanhar o trabalho dos alunos na resolução da tarefa proposta, pude observar que revelavam algumas dificuldades em compreender o que era pretendido com a ficha de trabalho, questionando várias vezes "Stôra, o que é que é para fazer?". Inicialmente, houve mesmo alguns pares que ao terminarem a construção das rectas no *GeoGebra* pensavam que tinham também concluído a tarefa.

Um dos pares em que surgiu esta dificuldade foi a Daniela e o Rodrigo. Para que compreendessem o que se pretendia, foi solicitado que lessem o enunciado e questionados sobre o que se seria necessário fazer para investigar relações entre ângulos, a que a aluna respondeu "Marcar os ângulos". Este par conjecturou então, a partir da observação de um único caso, construído no *GeoGebra*, que estes ângulos seriam congruentes (Figura 24).

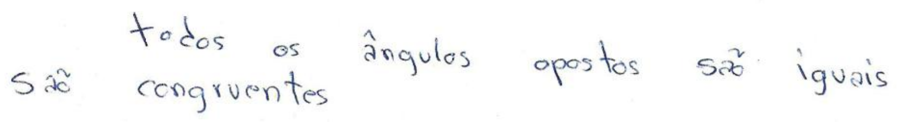


Figura 24 – Resolução da Daniela e do Rodrigo.

Note-se que, na sua conjectura, os alunos utilizaram inicialmente o termo igual, tendo só acrescentado que eram congruentes depois de questionados no sentido de se o termo igualdade seria o correcto, que se transcreve em seguida.

> **Professora:** Ângulos iguais?
> **Rodrigo:** Opostos. Os ângulos opostos têm a mesma amplitude.
> **Professora:** Iguais não dá. Então podemos dizer outra coisa? outra palavra parecida?
> **Daniela:** Congruentes.

Apesar de lhes ter sido solicitado que apresentassem as estratégias e raciocínios utilizados, este par apenas registou esta conjectura. No entanto, na sequência da resolução desta ficha, os alunos analisaram também o caso específico em que as rectas são perpendiculares e concluíram que obtinham apenas ângulos rectos, tal como salientou o Rodrigo: "Deu-nos sempre um ângulo recto".

As resoluções em que os alunos apenas registaram a sua conjectura, foram bastante frequentes nesta tarefa. Todavia, não deixaram de ser, também, apresentadas resoluções muito distintas dessas.

O Luís e a Vânia, na sua resolução, analisaram com o *GeoGebra* (Figura 25) um único caso, procurando uma relação entre os pares de ângulos observados, mas não generalizaram o que observaram nesse caso para todos os pares de ângulos nas mesmas condições. Deste modo, não chegaram a formular uma conjectura, registando apenas a relação existente no caso que observaram, ou seja, que existiam dois pares de ângulos verticalmente opostos congruentes (Figura 26).

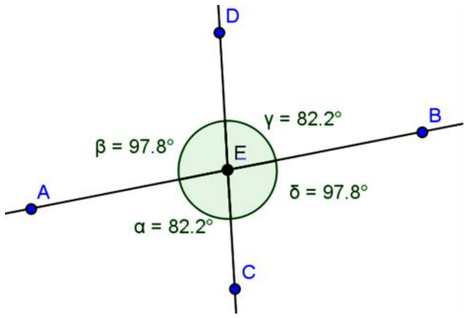


Figura 25 – Esboço da construção do Luís e da Vânia em *GeoGebra*.

Encontrá-mos dois ângulos verticalmente opostos que Têm a mesma amplitude.

1º- Os pontos {A, E, C} Têm uma amplitude de 97.8°, os pontos {B, E, D} Também.

2º- Os pontos {C, E, B} Têm uma amplitude de 82.2°, os pontos {D, E, A} Também.

Figura 26 – Resolução do Luís e da Vânia.

Por sua vez, o Bernardo e o Tomás começaram por marcar e medir os ângulos, utilizando o *GeoGebra*, e por procurar ângulos com a mesma amplitude num caso particular, analisando, depois, o que acontecia ao moverem uma das rectas.

No início da tarefa, estes alunos conseguiram, ainda que com alguma ajuda, identificar os pares de ângulos verticalmente opostos existentes na construção que tinham realizado no *GeoGebra* (Figura 27), como podemos compreender através do seguinte diálogo:

Professora: O que é que são ângulos verticalmente opostos?
Bernardo: São os que têm um vértice em comum e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.
Professora: Exacto. Então conseguem dar algum exemplo de ângulos verticalmente opostos?
Bernardo: Vértice comum e lados no prolongamento dos lados do outro. Hum… Não estou a perceber isto.
Tomás: Então o d e o b e o a e o c.
Professora: d e b, podes dizer de outra forma? d e b, queres dizer o quê?
Tomás:
Professora: Exacto. DEB e o outro…
Tomás: AEC
Professora: Exacto, DEB e o AEC. Então esses pares de ângulos, são dois ângulos, um par, chamam-se …
Bernardo: Vertical…
Professora: Verticalmente opostos, exacto. E há mais?
Bernardo: Sim, também são o CEB e AED.

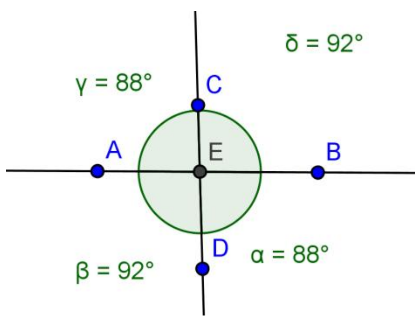
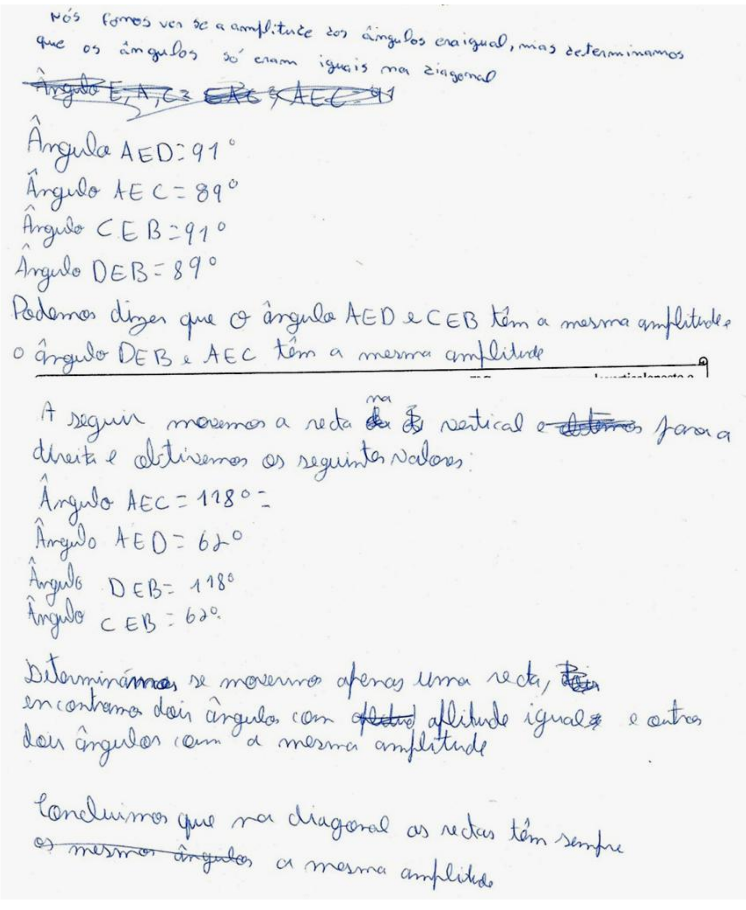


Figura 27 – Ficheiro *GeoGebra* elaborado pelo Bernardo e pelo Tomás.

No entanto, não conseguiram associar a definição dada à situação proposta, uma vez que, durante a resolução da tarefa, o Bernardo e o Tomás procuram encontrar forma de, através da posição relativa destes ângulos, conseguirem explicitar a relação que estavam a observar. Tal pode observar-se no excerto do diálogo entre os alunos, decorrido enquanto procuravam registar o que tinham feito e especificar quais os ângulos que estavam a considerar:

Bernardo: Agora não sei o que é que hei-de dizer… Determinamos que os ângulos eram iguais, verticalmente, horizontalmente … Mas como é que isto aqui é o quê? Diagonal…
Bernardo: Como é que isto agora aqui se diz?
Tomás: verticalmente…
Bernardo: Não, diagonal…

Apesar de o Tomás ainda ter referido o termo correcto, o Bernardo não conseguiu relacioná-lo com o que pretendia, acabando por na resolução escrita utilizar o termo "diagonal" (Figura 28). Assim, estes alunos apesar de aparentemente terem compreendido a relação, envolvida, tendo compreendido que os pares de ângulos são sempre congruentes, mostram dificuldades ao procurar formular e registar a conjectura de forma clara, tentando utilizar a posição relativa dos ângulos e acabando por não fazer uso da definição de ângulos verticalmente opostos que foi apresentada.


Nós fomos ver se a amplitude dos ângulos era igual, mas determinamos que os ângulos só eram iguais na diagonal
~~Ângulo E, A, C~~
Ângulo AED = 91°
Ângulo AEC = 89°
Ângulo CEB = 91°
Ângulo DEB = 89°
Podemos dizer que o ângulo AED e CEB têm a mesma amplitude e o ângulo DEB e AEC têm a mesma amplitude

A seguir movemos a recta na vertical ~~e obtemos~~ para a direita e obtivemos os seguintes valores:
Ângulo AEC = 118°
Ângulo AED = 62°
Ângulo DEB = 118°
Ângulo CEB = 62°

Determinámos se movermos apenas uma recta, encontramos dois ângulos com amplitude iguais e outros dois ângulos com a mesma amplitude

Concluímos que na diagonal as rectas têm sempre ~~os mesmos ângulos~~ a mesma amplitude

Figura 28 – Resolução do Bernardo e do Tomás.

Deste modo, na sua resolução (Figura 28) os alunos apresentam dois exemplos das explorações que efectuaram, explicando o que fizeram e o que determinaram com cada uma delas e procuram no fim sintetizar e generalizar que os dois pares de ângulos, AED com CEB e AEC com DEB são sempre congruentes.

O registo escrito das conjecturas parece, assim, ter sido uma das principais dificuldades sentidas pelos alunos no decorrer da tarefa, existindo várias resoluções em que a conjectura fica implícita.

Além das conjecturas que iam ao encontro da congruência dos ângulos verticalmente opostos, a Andreia e o Daniel formularam uma outra conjectura (Figura 29), apesar de não ser verdadeira, relacionada com a classificação dos ângulos, a partir da observação de alguns casos. Ao analisarem os pares de ângulos estes alunos não se limitaram a observar que eram congruentes, mas procuraram encontrar outros aspectos em comum. Assim, os alunos procuraram relacionar estes ângulos com a classificação de ângulos que conheciam, como se pode verificar na resposta que apresentam (Figura 29).

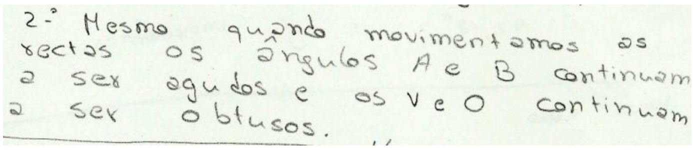

2.º Mesmo quando movimentamos as rectas os ângulos A e B continuam a ser agudos e os V e O continuam a ser obtusos.

Figura 29 – Resolução da Andreia e do Daniel.

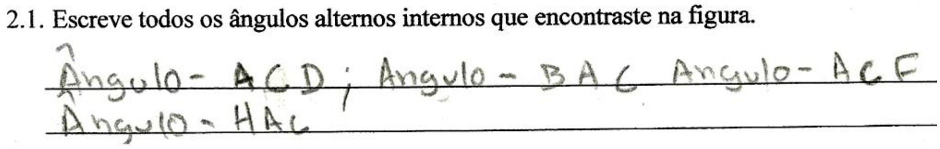
Para além das dificuldades já referidas, muitos alunos revelaram também algumas dificuldades no uso do *GeoGebra*, nomeadamente na marcação de ângulos.

5.2. Ficha de trabalho "Relações entre ângulos I"

Esta ficha de trabalho pretendia, tal como a anterior, que os alunos formulassem conjecturas. Assim, a ficha tinha duas questões, sendo uma primeira voltada para os ângulos alternos internos e uma outra que, para além de ter como objectivo explorar as relações existentes entre os ângulos formados por um sistema de duas rectas paralelas e uma secante, procurava possibilitar que raciocinassem dedutivamente, justificando essas relações, pelo menos nos momentos de discussão colectiva.

Na primeira questão (alínea 2.1) os alunos necessitavam de identificar os ângulos alternos internos e de explorar a relação existente entre eles. A maioria dos pares conseguiu identificá-los, apesar de, em alguns casos, terem surgido dificuldades em reconhecer que se estava a falar de pares de ângulos, ou seja, que um ângulo só poderia ser alterno interno relativamente a outro ângulo. Todavia com o decorrer do trabalho procurou-se ir chamando a atenção dos alunos para esse facto, pelo que a maioria das resoluções evidencia que compreenderam essa noção.

Na resolução da Jacinta (Figura 30), no entanto, verifica-se que ainda se limita a enumerar os ângulos envolvidos não salientando os pares. Mesmo assim, a ordem pela qual os ângulos foram apresentados, parece ter tido esse aspecto em consideração.


2.1. Escreve todos os ângulos alternos internos que encontraste na figura.

Ângulo - ACD ; Angulo - BAC Angulo - ACF
Angulo - HAC

Figura 30 – Resolução da Jacinta da pergunta 2.1.

A resolução da Andreia e do Daniel (Figura 31) revela que houve alguma evolução, uma vez que os alunos começaram por apenas enumerar os ângulos, reformulando depois de modo a tornar evidente os pares, procurando recorrer à notação utilizada pelo *GeoGebra*.

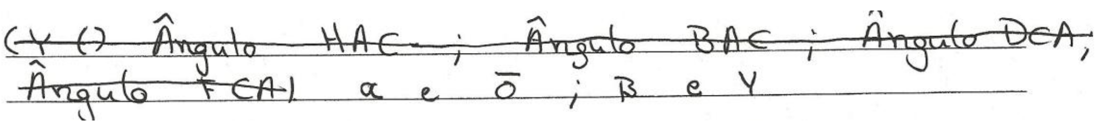
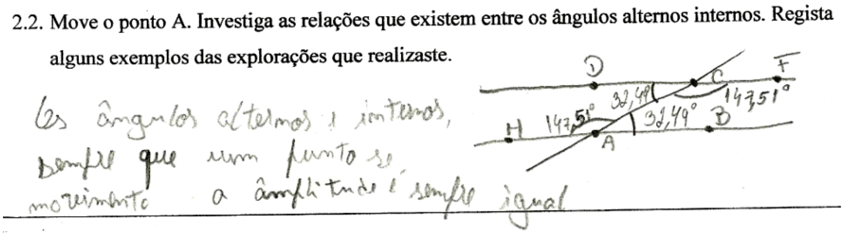

~~Ângulo HAC ; Ângulo BAC ; Ângulo DCA ; Ângulo FCA~~ α e δ ; β e γ

Figura 31 – Resolução da Andreia e do Daniel da pergunta 2.1.

A resolução da segunda alínea também não apresentou grandes diferenças entre os vários pares. De um modo geral, os alunos moveram os pontos e compararam os ângulos que na alínea anterior tinham considerado como sendo alternos internos, apercebendo-se que os ângulos alternos internos têm sempre a mesma amplitude, tal como se esperava.

O Ricardo, por exemplo, conjecturou que a amplitude entre os ângulos alternos internos é sempre a mesma, exemplificando um dos casos estudados (Figura 32).


2.2. Move o ponto A. Investiga as relações que existem entre os ângulos alternos internos. Regista alguns exemplos das explorações que realizaste.

Os ângulos alternos e internos, sempre que um ponto se movimento a âmplitude é sempre igual

Figura 32 – Resposta do Ricardo à questão 2.2.

A segunda questão da ficha (questão 3) pretendia então que os alunos observassem as relações existentes entre os ângulos, para além da encontrada para os alternos internos. Nesta questão as explorações diferiram bastante umas das outras. Uma das relações identificada pela maioria dos pares é a existência ângulos verticalmente opostos, que tinha sido trabalhada na aula anterior. No entanto para além destas foram formuladas outras conjecturas, como se exemplifica a seguir.

Para além da existência de ângulos verticalmente opostos, a Andreia e o Daniel referem, de entre as relações que identificaram, a congruência dos ângulos alternos externos (Figura 33).

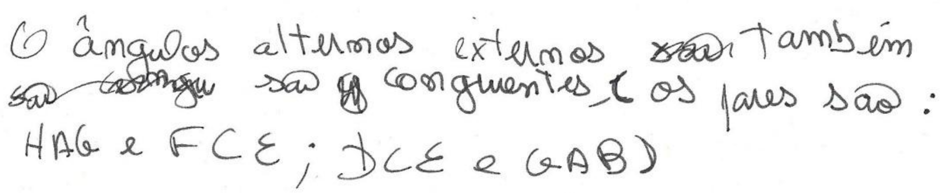


Figura 33 – Relação identificada pela Andreia e pelo Daniel na questão 3.

Apesar de a definição de ângulos alternos externos não ter sido ainda abordada quando os alunos realizaram esta ficha, este par recorreu à explicação que lhes tinha sido dada para a definição de ângulos alternos internos (ângulos entre as rectas situados de lados diferentes da recta secante) para "construírem" a definição de ângulos alternos externos. Identificarem dois pares de ângulos com estas características, e reconheceram cada par de ângulos como congruentes, o que foi possível compreender quando os alunos apresentaram a conjectura à turma.

Professora: Porque é que se chamam ângulos alternos externos?
Daniel: Então, porque estão em lados opostos da secante e fora das paralelas.

Tal como aconteceu nas conjecturas anteriores, também nesta os alunos partiram da observação para poderem chegar à relação, como explicou a Andreia na discussão com toda a turma.

Professora: Como é que vocês descobriram, que eles eram congruentes?
Andreia: Porque nós fomos movimentando as rectas, tal como a stôra dizia para fazer, e reparamos que sempre que as movíamos, tal como os alternos internos, os externos, que eram alternos entre si, também mantinham sempre a mesma amplitude.

Assim sendo, este par conseguiu tirar partido das funcionalidades do *GeoGebra*, para formular as suas conjecturas, e utilizou os raciocínios anteriores para descobrir uma nova relação.

Um outro par (Rodrigo e a Daniela) também teve em atenção o trabalho realizado anteriormente, neste caso na ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos", uma vez que exploraram o caso em que a recta secante era perpendicular às paralelas. Assim sendo, os alunos conjecturaram que neste caso obteriam oito ângulos congruentes (Figura 34).

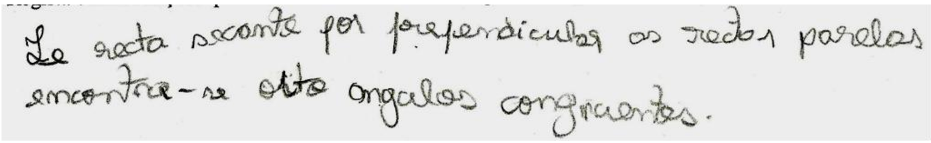

Se a recta secante for prependicular as rectas paralelas
encontra-se oito angulos congruentes.

Figura 34 – Relação identificada pelo Rodrigo e pela Daniela na questão 3.

5.3. Manual página 39 questão 6

Esta tarefa tinha como objectivo consolidar os conhecimentos dos alunos relativamente às relações entre pares de ângulos e à soma dos ângulos internos de um triângulo. Em relação, ao raciocínio matemático pretendia que os alunos justificassem as suas respostas através da elaboração de pequenas cadeias dedutivas.

Assim, a tarefa pedia que os alunos calculassem os ângulos assinalados pelas letras na Figura 35.

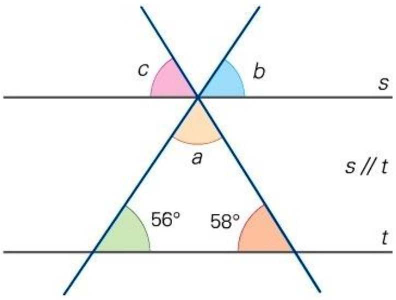


Figura 35 – Imagem da questão 6 da página 39 do manual.

Uma vez que se tratava de um trabalho de casa, esta tarefa acabou por não ser resolvida por todos os alunos. Apesar disso, de um modo geral, os alunos que a resolveram procuraram incluir na sua resolução as justificações dos passos que lhes permitiram obter as suas respostas, utilizando para isso as propriedades estudadas. No entanto, nem todos os alunos conseguiram, nesta tarefa, aplicar todas as propriedades correctamente.

A Jacinta começou por utilizar o resultado conhecido acerca da soma dos ângulos internos de um triângulo correctamente, apesar de não justificar os cálculos efectuados (Figura 37). Em seguida, aplicou a propriedade de ângulos alternos internos em rectas paralelas serem congruentes, de forma incorrecta. Assim sendo, a Jacinta revela ainda algumas dificuldades nestes conceitos, uma vez que os ângulos que identifica como sendo alternos internos, se assemelham a ângulos verticalmente opostos, apesar de não o serem.

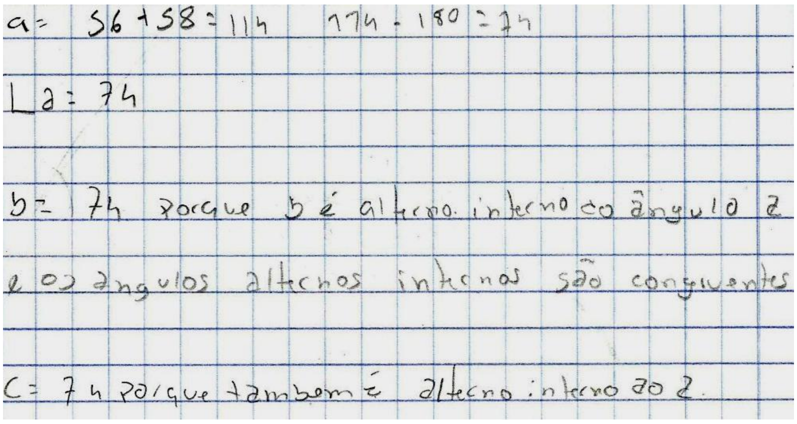

a= 56+58=114 114-180=74
∟a= 74
b= 74 porque b é alterno interno do ângulo a
e os ângulos alternos internos são congruentes
c= 74 porque também é alterno interno ao a.

Figura 37 – Resolução do trabalho de casa da Jacinta.

Por sua vez, o Telmo consegue determinar o valor correcto dos três ângulos e procura justificar os valores que obtém utilizando as propriedades que conhece, em especial a congruência dos ângulos verticalmente opostos. No entanto, o aluno ainda não se apercebe que a justificação que apresenta não é suficiente para obter a conclusão a que chegou, uma vez que ainda não permite relacionar os ângulos dados no enunciado com os ângulos *a*, *b* e *c*.

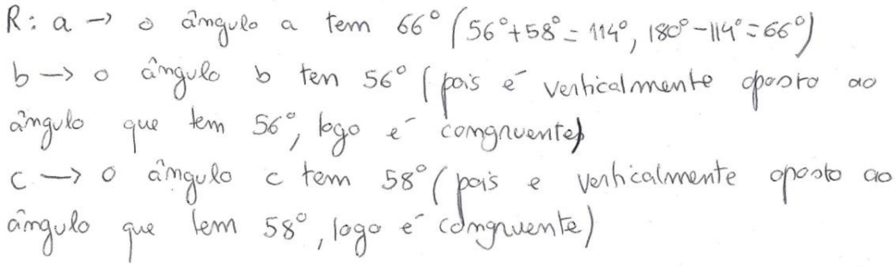

R: a → o ângulo a tem 66° (56°+58°= 114°, 180°−114°=66°)
b → o ângulo b ten 56° (pois é verticalmente oposto ao
ângulo que tem 56°, logo é congruente)
c → o ângulo c tem 58° (pois é verticalmente oposto ao
ângulo que tem 58°, logo é congruente)

Figura 36 – Trabalho de casa realizado pelo Telmo.

Por sua vez, o Daniel também conseguiu determinar correctamente os ângulos pedidos. Para tal, começou por assinalar mais dois ângulos auxiliares, que lhe permitiam determinar os ângulos pedidos através das propriedades estudadas (Figura 38). Assim, o Daniel explica quais as propriedades que pode aplicar na situação e depois determina a amplitude dos ângulos justificando-o, através das propriedades conhecidas. No entanto, tal como a maioria dos colegas, ao utilizar a propriedade da congruência dos ângulos alternos internos, o Daniel não refere que só é possível devido ao facto de as rectas serem paralelas. Mesmo assim, o Daniel utiliza já um raciocínio de carácter dedutivo para elaborar as suas justificações, sendo de salientar o uso que faz de expressões como "assim" e "logo" (Figura 38), que são utilizadas, frequentemente, em raciocínios dedutivos.

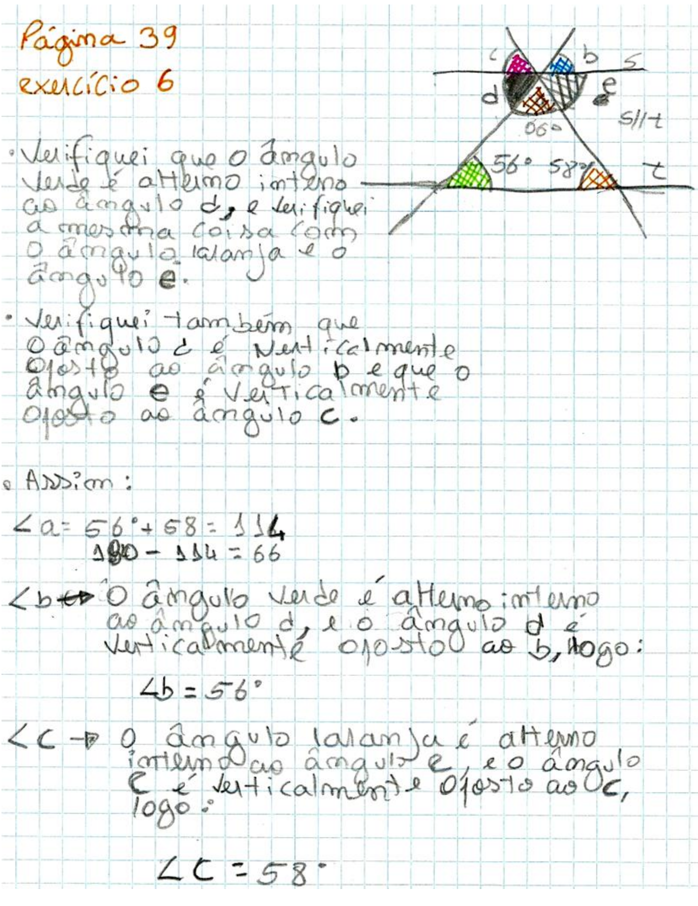


Figura 38 – Trabalho de casa elaborado pelo Daniel.

A determinação de outros ângulos auxiliares para conseguirem justificar as suas respostas foi utilizada por mais alguns alunos para além do Daniel. O Tomás foi um desses alunos. No entanto, contrariamente ao Daniel, o Tomás não apresenta um esboço da figura, pelo que acaba por não identificar os ângulos que considera (Figura 39).

Assim sendo, embora pareça à primeira vista que também o Tomás elaborou um raciocínio com características dedutivas, utilizando correctamente as propriedades estudadas, a sua resolução não é totalmente clara, visto não se poder ter a certeza dos ângulos por ele considerados.

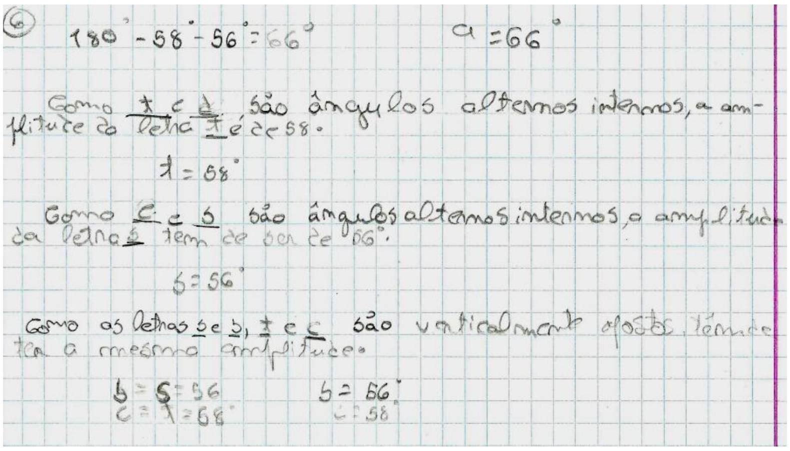


Figura 39 – Trabalho de casa realizado pelo Tomás.

A resolução do Jorge, por sua vez, não faz uso de nenhum ângulo auxiliar (Figura 40). Em vez disso, o aluno optou por aplicar sucessivamente as propriedades de modo a relacionar os dados da questão com a conclusão a que pretendia chegar, elaborando assim uma pequena cadeia dedutiva.

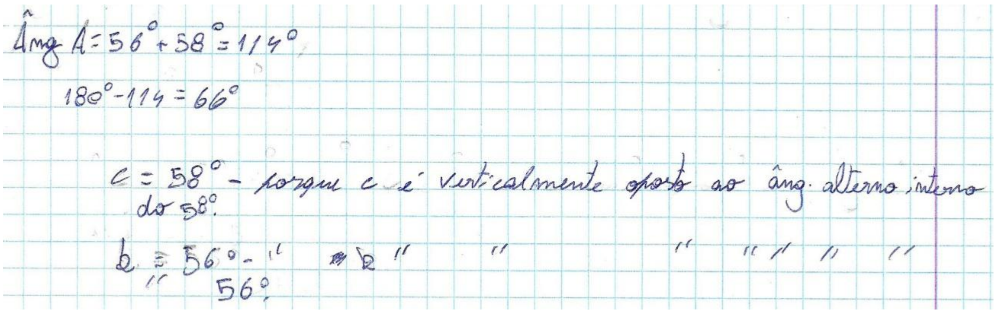
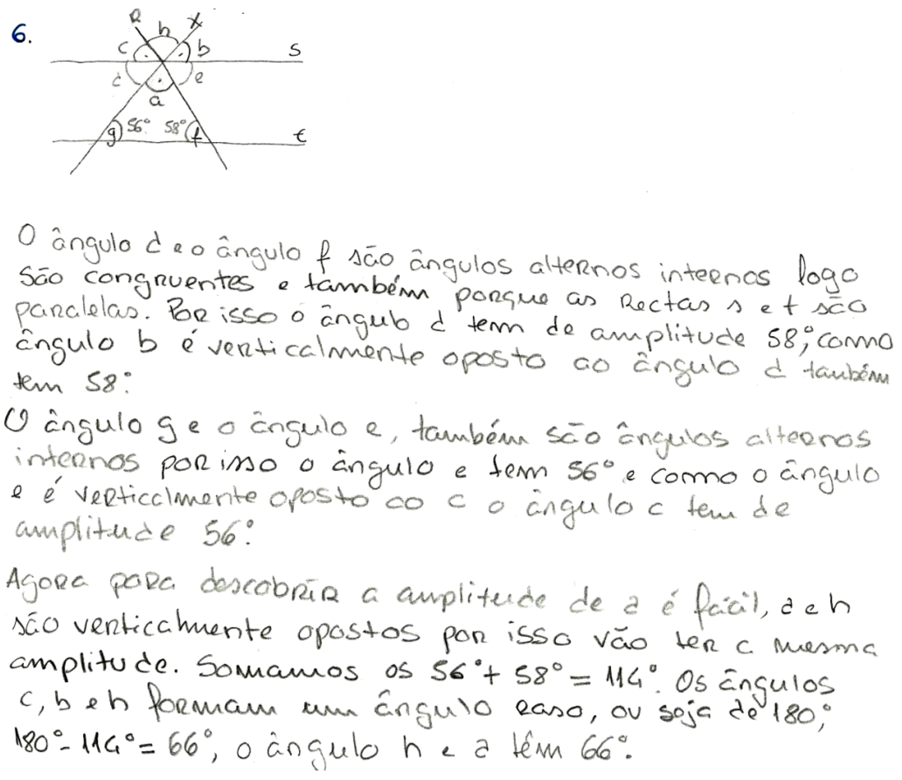


Figura 40 – Trabalho de casa realizado pelo Jorge.

Deste modo, para determinar a amplitude do ângulo *a,* a maioria dos alunos recorreu à soma dos ângulos internos de um triângulo, apesar de nenhum deles ter, verdadeiramente registado que a estava a utilizar, ou seja, limitaram-se a apresentar os cálculos.

A Sofia, porém, apresentou uma resolução bastante diferente das anteriores (Figura 41). Em vez de, como a maioria dos alunos, ter começado por determinar o ângulo *a*, esta aluna optou por determinar os outros dois ângulos, utilizando para tal ângulos auxiliares, tal como o Daniel e o Tomás, e utilizando o facto de existirem ângulos alternos internos e verticalmente opostos. No entanto, esta aluna é a única que refere o facto de as rectas em questão serem paralelas para justificar congruência dos ângulos alternos internos. Todavia, a aluna não identificou correctamente os ângulos alternos internos, o que se reflectiu na solução que apresentou para os ângulos *b* e *c*. Mesmo assim, a Sofia utilizou estes ângulos para, invocando o facto de formarem um ângulo raso, determinar a amplitude de um ângulo verticalmente oposto a *a*.



O ângulo d e o ângulo f são ângulos alternos internos logo são congruentes e também porque as rectas s e t são paralelas. Por isso o ângulo d tem de amplitude 58°, como ângulo b é verticalmente oposto ao ângulo d também tem 58°.

O ângulo g e o ângulo e, também são ângulos alternos internos por isso o ângulo e tem 56° e como o ângulo e é verticalmente oposto ao c o ângulo c tem de amplitude 56°.

Agora para descobrir a amplitude de a é fácil, a e h são verticalmente opostos por isso vão ter a mesma amplitude. Somamos os 56° + 58° = 114°. Os ângulos c, b e h formam um ângulo raso, ou seja de 180°, 180° - 114° = 66°, o ângulo h e a têm 66°.

Figura 41 – Parte da resolução da Sofia do trabalho de casa.

A Andreia apresentou ainda uma resolução diferente das dos seus colegas, apesar de incorrecta (Figura 42). Esta aluna considerou que os três ângulos no topo da figura eram iguais, pelo que, como formavam um ângulo raso, bastaria dividir 180 graus por 3, para obter a medida da amplitude de cada um deles. Assim, sendo, a aluna foi iludida pelo que via na figura, não tendo confrontado a sua intuição com os dados numéricos da figura.

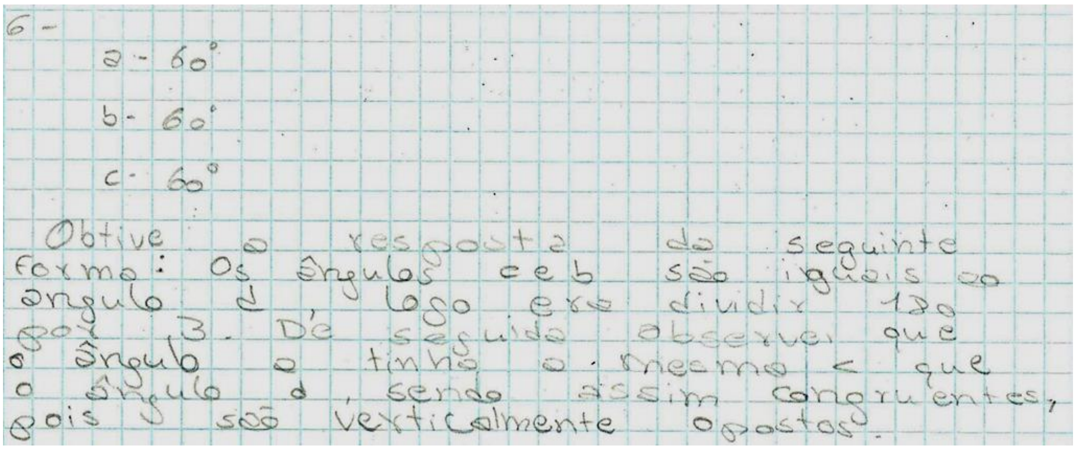

6 -
a - 60°
b - 60°
c - 60°
Obtive a resposta da seguinte forma: Os ângulos c e b são iguais ao ângulo d, logo era dividir 180 por 3. De seguida observei que o ângulo a tinha a mesma < que o ângulo d, sendo assim congruentes, pois são verticalmente opostos.

Figura 42 – Trabalho de casa realizado pela Andreia.

Portanto esta tarefa, permitiu que os alunos utilizassem os seus conhecimentos para determinarem as amplitudes de ângulos e, em alguns casos, que justificassem os passos da sua resolução através de pequenas cadeias dedutivas. Apesar disso, o alunos revelaram ainda algumas dificuldades neste tópico.

5.4. Ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo"

O objectivo desta ficha de trabalho era que os alunos compreendessem a relação entre a amplitude de um ângulo externo de um triângulo e os ângulos internos. Assim, tendo em conta a ficha que propus aos alunos, pretendia que estes formulassem e testassem conjecturas. Para além disso, pretendia, em especial na discussão da tarefa, trabalhar a justificação e demonstração dessas conjecturas.

A introdução e explicação do conceito de ângulo externo foram realizadas num primeiro momento antes de se iniciar a tarefa. Foi também neste primeiro momento feita uma pequena explicação da ficha.

Ao acompanhar o decorrer do trabalho dos alunos na aula, reparei que, para a maioria, descobrir a relação não foi um processo simples. Assim, de um modo geral, os pares, depois de terem medido os ângulos envolvidos, utilizando o *GeoGebra*, começaram por experimentar adicionar a amplitude de todos os ângulos referidos na tabela, ou seja os ângulos $\angle CBE$, $\angle BCA$ e $\angle CAB$, colocando o resultado na última coluna, como aconteceu com a Diana e o Dinis (Figura 43).

∠CBE	∠BCA	∠CAB	
81	38	42	161
72	30	42	144
120	54	66	137
50	20	30	100
[illegible]	35	55	180

Figura 43 – Tabela preenchida pela Diana e pelo Dinis.

No caso deste par, não foi registada nenhuma conjectura relativamente ao que tinham observado, não tendo chegado a procurar outro tipo de relações. Tal como este par, houve mais alguns alunos que não conseguiram progredir nas suas explorações, tendo, apenas, preenchido as linhas da tabela com os dados dos ângulos, obtidos utilizando o *GeoGebra*, e a última coluna com a soma de todos os ângulos.

No entanto, houve diversas estratégias entre os pares que conseguiram ultrapassar esta fase.

O Jorge e o Telmo começaram, também, por registar na última tabela a soma dos três ângulos referidos na tabela. No entanto, tendo verificado que por esse caminho não conseguiam chegar a nenhuma conclusão, acabaram por centrar a sua atenção na subtracção, ou seja observando os valores numéricos os alunos repararam que se subtraíssem ao ângulo da primeira coluna o da segunda obteriam o da terceira coluna. Assim, sendo os alunos concluíram que poderiam descobrir o valor do terceiro ângulo a partir dos outros dois. Por esta razão, a conjectura que registaram não especifica quais os ângulos a subtrair (Figura 44).

∠CBE	∠BCA	∠CAB	Relação
55°	32°	23°	Dá 110°
75°	21°	54°	Dá 150
70°	7°	63°	Dá 140
121°	65°	56°	

R: ~~Somando~~ Subtraindo 2 ângulos, descobrimos o 3º ângulo

Subtraindo a amplitude entre 2 ângulos, descobrimos o 3º ângulo.

Figura 44 – Resolução do Jorge e do Telmo.

No entanto, quando na aula seguinte, a propósito da discussão da tarefa, questionei o par sobre a conjectura a que tinham chegado, a resposta do Telmo já incluiu essa informação:

> **Telmo**: Nós chegamos à conclusão que a amplitude do ângulo CBE e subtrair essa amplitude pelo ângulo BCA vai dar o CAB.

Mesmo assim, note-se que este par reparou, essencialmente, nos valores numéricos, pelo que não fazem uma ligação entre o que observaram e o triângulo, tanto que os alunos não referem o facto de os ângulos envolvidos serem internos e externos.

Por sua vez, a Andreia e o Daniel dividiram a tabela para que contemplasse as diferentes explorações que realizaram para estes ângulos. Assim, começaram, tal como os pares referidos anteriormente, por somar os três ângulos (Figura 45).

∠CBE	∠BCA	∠CAB	todo	ângulos internos	
135°	28°	107°	=270°	135°	
153°	92°	61°	=306°	153°	
172°	152	20°	=344°	172°	
91°	38°	53°	=182°	91°	
169°	160°	9°	194°	169°	

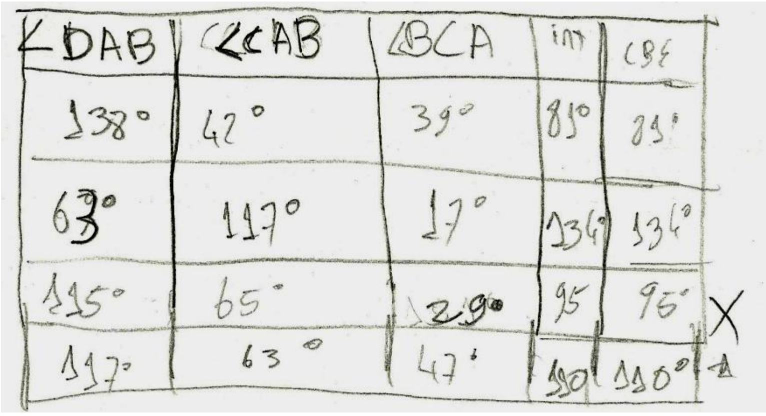
Figura 45 – Resolução da questão 1 realizada pela Andreia e pelo Daniel.

No entanto, como não observavam nada, optaram por experimentar adicionar apenas os ângulos internos, ou seja os ângulos $\angle BCA$ e $\angle CAB$ (Figura 45). Esta ideia foi motivada por uma segunda leitura do enunciado da tarefa, como podemos perceber através do diálogo ocorrido quando os alunos constataram que não conseguiam obter nenhuma conclusão a partir da soma dos três ângulos:

> **Professora:** Pois, se calhar não é para somar tudo. Se não tiraram nenhuma conclusão.
> **Andreia:** Olha. Podíamos somar… Aqui 'tá a falar dos dois ângulos internos e de um externo. Podíamos agora tentar somar só dois ângulos internos e ver se havia alguma relação.
> **Professora:** Muito bem.

Mesmo assim, os alunos tiveram ainda algumas dificuldades em encontrar alguma relação entre os ângulos, em parte porque procuravam um valor que fosse comum a todas às somas de todas as linhas das tabelas.

Para além disso, ao contrário da maioria dos pares, a Andreia e o Daniel procuram experimentar com outro ângulo externo, recorrendo para isso a uma tabela semelhante à que foi proposta na primeira questão (Figura 46). Deste modo, este par, aparentemente, compreendeu o papel da tabela na organização dos dados das experiências realizadas para a formulação de conjecturas.



∠DAB	∠CAB	∠BCA	int	CBE
138°	42°	39°	81°	81°
63°	117°	17°	134°	134°
115°	65°	29°	95	95°
117°	63°	47°	110	110°

Figura 46 – Resolução da questão 2 realizada pela Andreia e pelo Daniel.

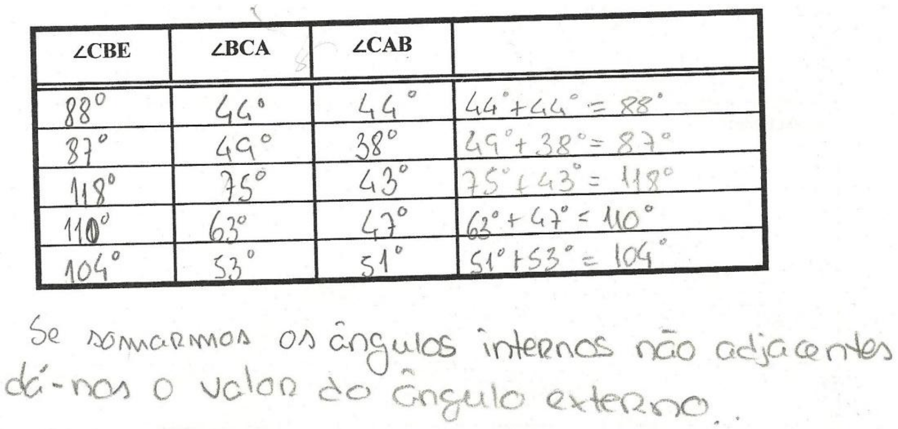
Nesta segunda tabela, apesar de considerarem um outro ângulo externo, os ângulos internos são os mesmos que utilizaram na questão 1, pelo que não chegaram a perceber completamente a relação envolvida. Isto é também visível na conjectura que a Andreia e o Daniel apresentaram à turma:

> **Andreia:** Nós chegámos à conclusão de que se somássemos os ângulos internos do triângulo a sua soma era igual à amplitude do ângulo CBE.

O facto de os alunos não terem compreendido, totalmente, a relação envolvida pode também dever-se a os alunos não terem conseguido terminar o seu trabalho.

O Afonso e a Sofia partiram também da soma dos ângulos internos $\angle BCA$ e $\angle CAB$ (Figura 47), tendo registado na última coluna essa operação. No entanto, a conjectura que registaram aproximou-se mais da relação em causa, uma vez que procuraram restringir quais os ângulos internos que poderiam ser utilizados para o ângulo externo.

Todavia, não tendo conseguido experimentar o que acontecia para outro ângulo externo, os alunos não compreenderam totalmente a relação que tinham obtido, sendo que na conjectura que formularam, apesar de referirem que os ângulos internos são não adjacentes, não é completamente explícito a que ângulo é que não são adjacentes. Esta situação tornou-se clara em conversa com os alunos na aula seguinte, quando pedi a demonstração, pois o Afonso acabou por considerar que todos os ângulos internos teriam um ângulo externo adjacente e que, por isso mesmo, a conjectura não seria verdadeira, ou seja, não se tinha apercebido que para cada ângulo externo é que se consideravam os internos não adjacentes.



∠CBE	∠BCA	∠CAB	
88°	44°	44°	44°+44° = 88°
87°	49°	38°	49°+38° = 87°
118°	75°	43°	75°+43° = 118°
110°	63°	47°	63°+47° = 110°
104°	53°	51°	51°+53° = 104°

Se somarmos os ângulos internos não adjacentes dá-nos o valor do ângulo externo.

Figura 47 – Resolução do Afonso e da Sofia.

Para além do trabalho de formulação de conjecturas, ao planear esta ficha pretendia que esta fosse um ponto de partida para trabalhar a demonstração matemática, o que se veio a verificar na sexta aula. Apesar de, em aulas anteriores, já terem sido demonstradas em grande grupo algumas conjecturas, ao propor aos alunos que tentassem a pares elaborar uma demonstração de que "a amplitude de um ângulo externo de um triângulo era igual à soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes", a maioria mostrou grandes dificuldades em compreender o que era pedido, não conseguindo chegar à demonstração.

Na realidade, apenas o Ricardo conseguiu delinear o caminho da demonstração da propriedade. Assim, o Ricardo utilizou o facto de o ângulo interno e o externo adjacentes serem suplementares, bem como o facto de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º para retirar a propriedade. Apesar disso, na resolução escrita, o aluno apenas registou os passos que tinha realizado, não apresentando a justificação de cada um deles, tal como se pode observar na Figura 48. Na sua resolução chamou-me, também, a atenção o facto de ele optar por denotar os ângulos com letras minúsculas, em vez de utilizar os vértices do triângulo.

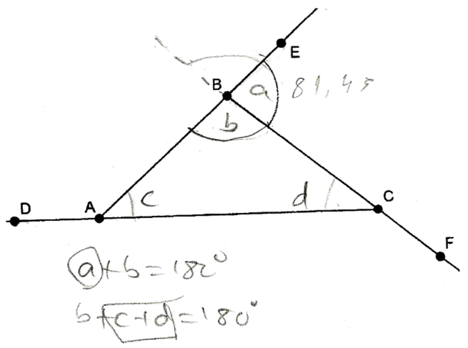


Figura 48 – Prova realizada pelo Ricardo

As justificações foram surgindo à medida que o Ricardo foi apresentando a sua resolução, aos colegas, através de questões que foram sendo colocadas ao Ricardo e à turma, de modo a que compreendessem e justificassem o que estava a ser feito. Assim, o Ricardo referiu que $a + b = 180°$, pois a e b estavam "alinhados", ou como, mais tarde, o Bernardo acrescentou formavam um ângulo raso. No que diz respeito à relação $b + c + d = 180°$ foi salientado que se devia ao facto de ser a soma dos ângulos internos de um triângulo. No entanto, o facto de que destas duas propriedades se retirava que $a = c + d$, acabou por se mostrar de difícil compreensão para os alunos, bem como que a razão se prendia com o facto de o b ser comum às duas expressões. Tal só ficou claro mais tarde.

Um outro aspecto que aparentemente também não ficou claro para os alunos, logo de início, foi o facto de que não podem utilizar a propriedade que pretendem provar na prova, uma vez que alguns alunos procuravam justificar que a amplitude de um ângulo externo é a soma das amplitudes dos ângulos internos não adjacentes, utilizando a própria propriedade.

Ainda no âmbito desta propriedade, o Dinis pensou que tinha encontrado um triângulo em que esta não funcionava. Esta ideia foi, então, exposta à turma, sendo semelhante ao esquema apresentado na Figura 49.

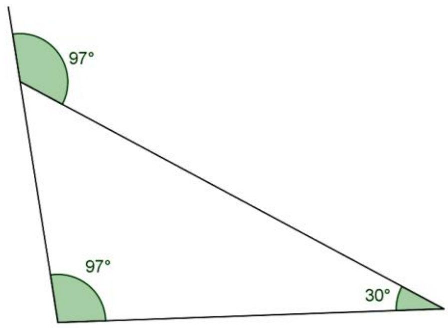


Figura 49 – Esquema do exemplo elaborado pelo Dinis.

Ao tentar reproduzir o exemplo construído pelo aluno gerou-se um momento de discussão interessante, uma vez que o Dinis acreditava que um ângulo externo e um interno não adjacente eram congruentes, como se pode ver no seguinte excerto:

Professora: O externo? É o externo que é igual a 97º?
Dinis: Este é igual a este (apontando para o ângulo interno de 97º e para o externo).
Professora: Porque é que este é igual a este?

Professora: O que o Dinis está a dizer faz sentido?
Bernardo: Não.
Professora: Porquê, Bernardo?
Bernardo: Como é que ele sabe que o 97º debaixo é igual ao 97 de cima?
Professora: Eu também gostava de saber.

No entanto, o Dinis não conseguia explicar como tinha determinado o valor do ângulo externo. Pelo que se pode perceber, pareceu-me que tinha utilizado a ideia dos ângulos correspondentes para retirar essa conclusão, não tendo em atenção que não se estava em presença de rectas paralelas. Por sua vez, ao Bernardo a ideia não lhe parecia correcta.

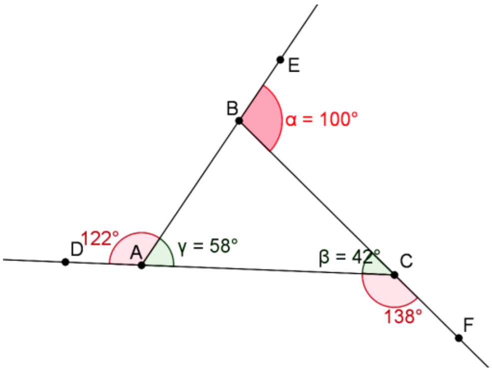
5.5. Discussão sobre a soma dos ângulos externos de um Triângulo

Para além da discussão da ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo", a sexta aula teve um outro momento de discussão correspondente à exploração, em grande grupo, da soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo, tendo por base um ficheiro de *GeoGebra*, e à realização da demonstração dessa propriedade. Desta forma, esta última aula do meu estudo tinha como objectivo trabalhar a demonstração matemática. Assim, não foi planeada nenhuma ficha de trabalho específica, como já foi referido no capítulo 3.

A formulação desta última conjectura, ou seja, de que a soma das amplitudes dos ângulos externos de um triângulo é sempre 360º foi bastante mais simples para os alunos do que as anteriores. A partir da marcação e medição dos ângulos externos, os alunos foram respondendo o valor da soma e à medida que se foi alterando o triângulo alguns foram dizendo que era sempre 360º.

A demonstração desta conjectura pretendia ser um momento que possibilitasse que os alunos utilizassem o raciocínio dedutivo, argumentando com os colegas. Assim, ao contrário da conjectura da ficha "Ângulos externos de um Triângulo" em que, primeiramente, foi pedido que os alunos pensassem a pares em como se poderia provar o resultado, na demonstração desta última conjectura procurou-se que toda a turma participasse na sua elaboração. Para apoiar este trabalho foi, então, utilizado um ficheiro

GeoGebra com um triângulo em que estavam marcados os ângulos externos, de modo a facilitar a apresentação e discussão dos raciocínios dos alunos, servindo de suporte à



argumentação (Figura 50).

Uma das primeiras intervenções partiu do Rodrigo que observou o seguinte:

> **Rodrigo:** Professora, ali no ponto A 122+58=180 e no ponto C 138+42=180, ou seja a soma dos dois ângulos externos 180+180=360.

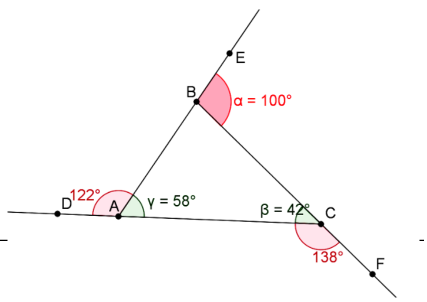
Assim, o Rodrigo adicionou um ângulo interno e um externo adjacente e repetiu o processo para outros dois ângulos e somou os dois resultados obtendo os 360 graus.

Figura 50 – Ficheiro *GeoGebra* utilizado para a discussão da soma dos ângulos externos do triângulo.

No entanto, o seu raciocínio assentava apenas nos valores numéricos, como foi perceptível ao questioná-lo no sentido de perceber como tinha chegado à conclusão. Para além disso, o seu raciocínio não era suficiente para se chegar à conclusão pretendida, uma vez que os 360 graus resultavam de adicionar apenas dois ângulos externos, e não três como pretendido, e dependiam de dois ângulos internos. Apesar de ser um pouco especulativo, a ideia com que fiquei da resposta do aluno foi de que procurava apenas uma soma de ângulos cujo resultado fosse 360º.

Em discussão a sua resolução foi sendo completada, começando-se por salientar que não seriam necessários valores numéricos para se obter esse resultado. Apesar disso, continuavam a não estar ainda contemplados explicitamente todos os ângulos externos. A prova foi completada pela Andreia ao observar que:

> **Andreia:** Nós tínhamos descoberto que este com este (aponta para os ângulos internos CAB e BCA) davam este (aponta para o ângulo externo CBE) e agora nos temos



> estes dois (aponta para os ângulos externos BAD e ACF). Depois falta substituir estes dois (aponta para os ângulos internos BCA e CAB), que é este (aponta para o ângulo externo CBE).

Deste modo, a aluna completou o raciocínio que estava a ser trabalhado pela turma, utilizando a propriedade que tinha sido deduzida anteriormente, pelo que aparentemente apreendeu aspectos fundamentais deste tipo de raciocínio. É também importante notar que o facto de a aluna ter completado a sua apresentação com gestos, tornou mais fácil, para os colegas acompanhar o seu raciocínio.

Para além destas duas contribuições, ao procurar um caminho que permitisse demonstrar a propriedade, o Tomás e o Bernardo sugeriram que se poderia ir também por outra via:

> **Tomás:** Se eu juntar este, com este, com este formam um ângulo giro que é 360º.

Apesar de inicialmente, ter pensado que o seu raciocínio se tinha baseado nos valores numéricos, ao questionar os alunos sobre a forma como tinham pensado, o Bernardo respondeu que:

> **Bernardo:** Como eu já sabia que a soma dos ângulos externos é 360, reparei que se juntássemos duas peças ao desenho tínhamos um ângulo giro.

Assim sendo, os alunos relacionaram os ângulos externos, reparando que se os deslocassem, poderiam juntá-los e formar um ângulo giro, por conseguinte, o Bernardo e o Tomás recorreram à visualização para tentar justificar a relação em causa.

Portanto, as intervenções de vários alunos possibilitaram então que a turma conseguisse elaborar a demonstração da propriedade.

6. Reflexão final

No decorrer deste trabalho procurei compreender mais aprofundadamente o raciocínio matemático dos alunos, na resolução de algumas das tarefas propostas. Neste último capítulo, procuro, assim, dar resposta às três questões formuladas no início do estudo: Como é que os alunos formulam, testam e justificam as suas conjecturas na resolução de tarefas de exploração/investigação? Como é que os alunos fundamentam as suas afirmações usando conceitos e propriedades geométricas? Quais as dificuldades que os alunos evidenciam no que se refere ao raciocínio matemático? Assim sendo, procurei perceber como é que os alunos formulam, testam e justificam conjecturas e fundamentam as suas afirmações e quais as principais dificuldades que apresentam, atendendo aos dados analisados no capítulo anterior.

6.1. Formulação, teste e justificação de conjecturas

No decurso das aulas que leccionei procurei que os alunos tivessem várias oportunidades para trabalhar com conjecturas, em especial, a sua formulação. As fichas de trabalho “Ângulos verticalmente opostos”, “Relações entre ângulos I” e “Ângulos externos de um triângulo” pretendiam ir ao encontro desse objectivo.

Atendendo às características destas três fichas de trabalho, ao procurarem formular conjecturas, os alunos passaram por uma primeira fase, em que, utilizando a ferramenta “Ângulo” do *GeoGebra*, começaram por marcar e medir ângulos. Em paralelo, também, a observação de alguns casos particulares, recorrendo à movimentação de objectos no *GeoGebra*, foi uma das principais bases para a formulação das diferentes conjecturas.

No caso da ficha “Ângulos verticalmente opostos”, muitos pares basearam as suas conjecturas apenas na análise de um número muito reduzido de casos, existindo mesmo alguns, como o Rodrigo e a Daniela, que retiraram a conclusão a partir de uma única experiência. Por outro lado, a observação que o Bernardo e o Tomás realizaram foi desde o início direccionada, ou seja, começaram a sua exploração procurando ângulos congruentes.

O Daniel e a Andreia, numa das conjecturas que formularam nesta tarefa, procuraram relacionar os conhecimentos que já tinham sobre a classificação de ângulos com a situação com que se depararam. Esta situação evidencia o papel importante que os conhecimentos prévios dos alunos podem ter na formulação de conjecturas, levando-os a estabelecer relações que o professor não tenha antecipado.

Algumas das conjecturas formuladas na resolução da questão 3 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I", como é o caso da existência de quatro pares de ângulos verticalmente opostos, exemplificam também a utilização dos conhecimentos matemáticos prévios na identificação de relações. Para além disso, o facto de a Daniela e o Rodrigo terem formulado nesta questão uma conjectura referente à recta perpendicular, sendo esta uma situação que já tinham trabalhado a propósito da primeira ficha, revela que os alunos também utilizam conjecturas anteriores para formular novas.

Por sua vez, para formularem as conjecturas que lhes eram solicitadas na ficha "Ângulos externos de um Triângulo", alguns alunos utilizaram uma tabela para organizar os dados, por sugestão da própria ficha, começando por adicionar os ângulos. No entanto, este tipo de manipulação dos dados pode ter tido alguma influência minha, uma vez que, tanto na apresentação da tarefa, como no apoio aos alunos, fui sugerindo que esta relação poderia necessitar que realizassem algumas operações com as amplitudes dos ângulos. Será que podia ter feito de outra forma? Talvez, no entanto, e atendendo às dificuldades que surgiram e a que alguns alunos, como o Daniel e a Andreia, procuravam algo igual em todas as linhas, penso que se tivesse optado por uma solução em que não eram dadas indicações se corria o risco de a tarefa se tornar demasiado complexa e de, por conseguinte, os alunos perderem o interesse.

Nesta ficha, foi, igualmente, evidente a influência dos valores numéricos na formulação de conjecturas. O Jorge e o Telmo, por exemplo, acabam por se centrar nos valores que obtêm, não prestando muita atenção ao triângulo em si.

Portanto, embora nestas tarefas a observação permitisse estabelecer conjecturas variadas, não é o único recurso utilizado pelos alunos, tendo, estes mobilizado, também, os seus conhecimentos e experiências anteriores na sua actividade.

O teste de conjecturas acabou por não ser um aspecto muito visível neste estudo. Na realidade os dados analisados não nos fornecem, praticamente, informação sobre o teste de conjecturas. Aparentemente, tal como salientam Ponte, Brocado e Oliveira (2003), o teste de conjecturas esteve, intimamente, ligado com a sua formulação, ou seja, as experiências utilizadas para a formulação da conjectura acabaram por constituir o próprio teste. Assim sendo, de que forma se poderá trabalhar o teste de conjecturas? Ao olharmos para as situações apresentadas, na análise de dados, podemos destacar duas em que o teste de conjecturas poderia ter tido um papel muito importante: uma na ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos" e a outra na ficha "Ângulos externos de um Triângulo. No caso da primeira, uma boa exploração da segunda conjectura da Andreia e do Daniel, sendo uma conjectura que se verifica para um grande número de casos, mas não para todos, poderia ter constituído uma oportunidade de os alunos compreenderem o papel do teste de conjecturas na sua refutação. No entanto, na altura não me apercebi bem da sua importância, e como estava com dificuldades na gestão do tempo, penso que acabei por não tornar este momento tão rico como potencialmente seria.

Por sua vez, a questão 2 da ficha "Ângulos externos de um Triângulo" pretendia, justamente, levar os alunos a testarem as suas conjecturas, no entanto, apenas a Andreia e o Daniel chegaram a trabalhar essa questão. Mesmo assim, atendendo às dúvidas observadas nesta relação, o teste com outros ângulos externos poderia ter tido uma função de permitir uma melhor compreensão da conjectura.

Dos dados analisados, as situações em que os alunos procuraram justificar as suas conjecturas foram extremamente raras. Mesmo quando questionados nesse sentido os alunos mostraram dificuldades em fazê-lo. Assim, este tipo de justificação realizou-se, maioritariamente, através das demonstrações realizadas em grande grupo.

6.2. Fundamentação das afirmações

A fundamentação das afirmações deveria de ter sido, à partida, um aspecto transversal a todas as tarefas propostas aos alunos, no entanto, no decorrer da minha prática lectiva, penso que acabei por não lhe dar o devido realce perante os alunos. Ainda assim, existiram diversas situações em que os alunos evidenciam começar a dar passos no sentido de justificar as suas afirmações, em alguns casos, recorrendo ao raciocínio matemático de carácter dedutivo.

Na questão 3, da ficha "Relações entre ângulos I", o Daniel e a Andreia fundamentam a sua afirmação acerca da existência de ângulos alternos externos utilizando uma analogia com a definição de ângulos alternos internos, obtendo uma nova definição.

No trabalho de casa do manual, que foi analisado no ponto 5.3, os alunos procuraram fundamentar as suas conclusões fazendo uso das propriedades conhecidas, nomeadamente dos ângulos verticalmente opostos, alternos internos e da soma dos ângulos internos de um triângulo. Para além disso, para ajudar a elaborar as justificações, vários alunos utilizaram ângulos auxiliares, tal como tinha sido feito em outras fichas de trabalho anteriores. Assim sendo, em algumas resoluções surgiram pequenas cadeias dedutivas para justificar as conclusões apresentadas.

Tal como aconteceu noutras tarefas, os alunos mostraram uma tendência para não fundamentarem as suas afirmações relativamente à soma dos ângulos internos de um triângulo, na sua resolução escrita, ou seja, apresentam apenas os cálculos, sem registarem o porquê. No entanto, creio ter uma ideia da origem desta que se deverá em parte ao facto de na primeira tarefa de aplicação da soma dos ângulos internos de um triângulo ter optado por não registar esta justificação, uma vez que era a única envolvida. Assim, os alunos parecem ter seguido esse mesmo esquema, omitindo a propriedade no registo escrito, embora quando questionados oralmente, a maioria consiga explicar o seu raciocínio fundamentando-o através da propriedade.

Simultaneamente, nesta tarefa, ao utilizarem o facto de os ângulos alternos internos serem congruentes, os alunos, normalmente, não referem que isso se deve ao facto às rectas serem paralelas. Deste modo, na resolução das suas tarefas, os alunos utilizam algumas propriedades geométricas que estudaram, sem, no entanto, as explicitar, provavelmente, por considerarem que a professora compreenderá que estão a fazer uso delas.

Embora as resoluções escritas da ficha "Ângulos externos de um Triângulo" não forneçam grandes contributos a nível da fundamentação de afirmações, uma vez que os alunos ao formularem as suas conjecturas não as procuraram fundamentar, a discussão realizada em torno da demonstração forneceu alguns dados interessantes. Assim, relativamente à demonstração da propriedade em causa, o Ricardo ao registar a prova não justificou os seus passos, no entanto, oralmente conseguiu completá-la, utilizando o ângulo raso e a soma dos ângulos internos de um triângulo.

Na soma dos ângulos externos de um triângulo, o Rodrigo recorreu ao exemplo concreto que tinha sido apresentado, apoiando-se nos valores numéricos das amplitudes dos ângulos para justificar as suas afirmações em relação ao valor da soma dos ângulos que estava a considerar (um ângulo externo e o interno adjacente) ser 180º, não tendo utilizado nenhuma propriedade. Em contrapartida, para completar a demonstração de que a soma da amplitude dos ângulos externos é igual 360º, a Andreia recorreu à propriedade que tinham acabado de estudar, ou seja, que a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes de dois internos não adjacentes, com o objectivo de relacionar os dois ângulos internos, que, ainda, apareciam no raciocínio que a turma estava a elaborar, com o ângulo externo que ainda não tinha sido considerado.

Para além dos valores numéricos e das propriedades para justificar esta última propriedade, o Bernardo e o Tomás apelaram também para a visualização, na medida em que referiram que se "pegassem" nos ângulos externos poderiam agrupá-los formando um ângulo giro.

6.3. Dificuldades dos alunos

Dos vários aspectos do raciocínio matemático trabalhados no decurso desta unidade, pensei que a formulação de conjecturas fosse talvez o mais simples para os alunos e que não fosse levantar muitos problemas, pelo menos nas tarefas iniciais, visto que, na minha opinião, uma observação, ainda que cuidada, lhe daria as pistas praticamente todas. No entanto, tal não se verificou. Uma das primeiras dificuldades sentidas pelos alunos foi compreender o que se pretendia com a formulação de conjecturas ("o que tinham de fazer?"), como revelam os momentos iniciais da primeira ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos".

Nesta ficha de trabalho, os alunos revelaram uma outra dificuldade. Embora a maioria dos alunos tenha até conseguido compreender a relação existente entre os ângulos verticalmente opostos, poucos alunos foram capazes de registar de forma clara a conjectura. Uma das razões que provavelmente esteve na origem desta dificuldade foi o facto de não ter sido realizada uma introdução prévia à ficha de trabalho em questão, nem explorado com os alunos a definição de ângulos verticalmente opostos que era ali apresentada. Assim, a falta de tomada de consciência dessa definição e a dificuldade em estabelecer uma ligação entre a definição e a situação em estudo, como aconteceu com o Bernardo e o Tomás, tornou mais complicado o registo escrito desta conjectura.

Ao procurar ajudar os alunos a ultrapassar esta dificuldade, a introdução da ficha "Relações entre ângulos I" foi mais cuidada, procurando-se que compreendessem minimamente a definição antes de trabalharem de forma autónoma. Deste modo, o registo escrito das conjecturas, apresentou-se bastante mais simples, nesta situação.

A resolução do Luís e da Vânia da ficha "Ângulos verticalmente opostos" revela que tiveram também alguma dificuldade em generalizar, ou seja, conseguiram encontrar a relação existente para um caso específico, mas não chegam a formular a conjectura para quaisquer outros pares de ângulos verticalmente opostos.

A realização da ficha de trabalho "Ângulos externos de um triângulo" colocou aos alunos diversas dificuldades. Mesmo realizando uma apresentação com algum cuidado e recorrendo a tabelas para organizar os dados, os alunos tiveram muitas dificuldades em encontrar a relação e em formular uma conjectura. Assim, ao contrário do que aconteceu com a ficha "Ângulos verticalmente opostos", nesta tarefa, a principal dificuldade residiu mesmo na identificação da relação envolvida. Não sendo uma relação idêntica às que tinham trabalhado anteriormente, os alunos mostraram alguma dificuldade em observar a relação. A tabela permitiu aos alunos organizarem melhor os dados e através da sua análise estabelecer a relação. Uma vez que esta relação não foi evidente, deveria ter optado por orientar mais a tarefa referindo quais os ângulos a adicionar na última coluna? Do que pude observar destas aulas, não creio que essa opção tivesse sido a mais indicada, uma vez que, tal como refere o NCTM (2008), a formulação de conjecturas que não sejam válidas é também importante para a aprendizagem dos alunos. Deste modo, penso que a experiência de optar por uma estratégia que não funciona e necessitar de pensar noutra faz também parte do desenvolvimento do raciocínio matemático, mesmo significando que a tarefa pode demorar um pouco mais de tempo a ser concluída.

Nesta ficha, mesmo os alunos que conseguiram perceber a relação existente entre os ângulos da tabela mostraram dificuldades em generalizar essa relação para os restantes ângulos do triângulo.

Associada a esta tarefa estava também prevista a elaboração de uma demonstração. A demonstração foi talvez a área do raciocínio matemático onde tenham surgido mais dificuldades, o que não é de estranhar, uma vez que, em geral, não é um tema fácil para os alunos, conforme é referido no capítulo 2, e era a primeira vez que contactavam com ela. Ao pedir aos alunos que elaborassem uma prova da conjectura obtida na ficha "Ângulos externos de um Triângulo, as primeiras dificuldades surgiram com o próprio pedido, uma vez que a maioria dos alunos não compreendeu exactamente o que se pretendia. Por um lado, a demonstração era um tópico recente para os alunos, pelo que era natural que ainda não estivesse interiorizado. Por outro, creio que podia ter sido mais clara em relação ao que pretendia.

Ao discutir a prova elaborada pelo Ricardo, tornou-se evidente uma outra dificuldade. O Ricardo utilizou na sua prova o facto de um ângulo interno e um externo serem suplementares e de a soma dos ângulos internos de um triângulo ser 180º para provar que a amplitude de um ângulo externo era igual à soma das amplitudes dos dois ângulos internos não adjacentes. O recurso a estas duas propriedades não suscitou grandes dúvidas. No entanto, o facto de, da conjunção destas duas, se poder retirar a propriedade pretendida, foi muito complicado para os alunos entenderem. Esta dificuldade já tinha sido sentida, embora de modo muito mais suave, na demonstração, em grande grupo, de que dois ângulos verticalmente opostos são congruentes. Na realidade, este tipo de conclusões envolve um tipo de raciocínio lógico com o qual os alunos não estão, ainda, familiarizados. Assim sendo, de que forma poderiam os alunos compreender o que estava em causa? Penso que, talvez, a utilização de exemplos de ângulos concretos de modo a que se pudesse aplicar o mesmo tipo de raciocínio poderia, neste caso, ter sido uma mais-valia.

6.4. Concluindo

Ao longo deste estudo e, em especial, ao analisar os dados recolhidos, tomei consciência de vários aspectos relacionados tanto com as questões em estudo, como com a minha prática lectiva.

Deste modo, através dos dados analisados pude compreender que embora a observação de vários casos tenha um papel fundamental na formulação de conjecturas, este não é o único recurso que os alunos mobilizam neste tipo de actividade, pelo contrário, alguns alunos procuram, também, analisar os dados atendendo aos conhecimentos e experiências que já possuem. Para além disso, a formulação de conjecturas não é tão simples para os alunos como inicialmente pensei. Na realidade, requer bastante tempo e que os alunos façam várias experiências e uma observação mais ou menos criteriosa. Para tal não basta dizer para experimentarem mais do que um caso ou uma dúzia deles, é necessário levar os alunos a fazerem-no. Assim sendo, penso que nas primeiras tarefas que propus poderia ter explorado melhor estas ideias, no sentido de fornecer ferramentas que pudessem ser úteis na formulação de novas conjecturas.

Em relação ao teste e à justificação de conjecturas, os alunos não tendem a realizá-los, mas, estes processos têm um papel muito importante, não só por fazerem parte integrante da actividade matemática, mas também porque possibilitam uma melhor compreensão da própria conjectura. Por exemplo, se na ficha "Ângulos externos de um Triângulo" se tivesse procurado testar as conjecturas formuladas, os alunos poderiam compreender melhor o significado de cada uma, facilitando assim a compreensão da propriedade em causa.

Muito embora a demonstração não seja simples para os alunos, esta não é totalmente inacessível neste nível de escolaridade. Muito pelo contrário. Todavia, como tudo, implica que os alunos tenham oportunidades para o fazer. As discussões em grande grupo são uma boa hipótese para a introdução da demonstração, uma vez que possibilita a troca de ideias e que se construam os raciocínios em conjunto. No entanto, ao realizar demonstrações com os alunos, dois aspectos chamaram a minha atenção: por um lado, algo que para nós é óbvio, para alguns alunos pode, por vezes, representar uma grande dificuldade à compreensão do que se está a fazer; por outro, os alunos conseguem, por vezes, mesmo com pouca experiência, elaborar demonstrações, surpreendendo-nos ao seguirem por um caminho igualmente válido, mas que não nos tinha ocorrido.

Quando inicialmente analisei os objectivos do Programa de Matemática do Ensino Básico (ME, 2007), em termos do raciocínio matemático, pensei que não seria possível neste estudo abordar o papel das definições em Matemática. Hoje vejo que não podia estar mais enganada. Não há melhor forma de perceber a importância de algo do que sentir a sua falta. Assim, ao analisar os dados obtidos e ao reflectir sobre o decorrer das aulas apercebi-me que em várias situações eram os próprios alunos que ao procurarem registar as conjecturas relativas às relações observadas sentiam necessidade dessas mesmas definições, como aconteceu por exemplo na ficha "Ângulos verticalmente opostos", em que alguns alunos acabaram por procurar outras formas de expressar o que observavam.

Ao longo deste estudo compreendi que existem ainda vários aspectos que preciso de trabalhar de modo a proporcionar uma melhor aprendizagem aos alunos. A introdução das tarefas é um deles. Na primeira tarefa que propus aos alunos não lhes forneci praticamente nenhuma informação, ou seja, limitei-me a entregar a ficha. No entanto, com o decorrer da aula pude perceber que essa não tinha sido a melhor opção. A introdução de uma tarefa é também um momento fundamental da aula e não algo dispensável. Este momento possibilita que todos os alunos compreendam a actividade que se pretende realizar. É verdade, que se fornecermos demasiada informação podemos limitar a tarefa, mas se não dermos nenhuma arriscamo-nos a que os alunos não compreendam o que têm de fazer e fiquem perdidos.

Se compararmos os planos de aula com as aulas realizadas, apercebemo-nos que em nenhuma aula este foi cumprido na íntegra. O que se passou então? Por um lado, a maioria dos planos determinava várias tarefas para a mesma aula, sendo que, por isso mesmo, o tempo não deixava uma grande margem de manobra. Por outro, os alunos levaram bastante mais tempo do que o previsto para realizarem as suas explorações no *GeoGebra*, pelo que acabei por prolongar sempre a realização destas tarefas. Ainda assim, esta pareceu-me a opção mais correcta, uma vez que não faria sentido começar a discutir uma tarefa que apenas um ou dois alunos tinham realizado.

Portanto, este estudo permitiu-me uma reflexão sobre a minha prática lectiva, tanto no sentido de compreender o raciocínio matemático dos alunos e como posso desenvolvê-lo, como em relação aos aspectos que tenho ainda de trabalhar de modo a contribuir para uma melhor aprendizagem dos alunos.

Referências Bibliográficas

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitative em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8.º ano)*. (Tese mestrado, Universidade de Lisboa)

Duval, R. (1990). Pour une approche cognitive de l'argumentation. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives 3*, 195-221. Strasbourg: IREM de Strasbourg. Recuperado a 20 de Maio de 2011 de http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/indexFR.html.

Jiang, Z. (in press). Explorations and reasoning in the dynamic geometry nvironment. *In the Proceedings of the Thirteenth Asian Conference on Computers in Education*. Recuperado a 25 de Abril de 2011 de http://atcm.mathandtech.org/EP2008/papers_full/2412008_15336.pdf.

Loureiro, C. (2009). Geometria no novo programa de matemática do ensino básico: contributos para uma gestão curricular reflexiva. *Educação e Matemática, 105*, 61-66.

Ministério da Educação (1991*). Organização curricular e programas (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Imprensa Nacional Casa da Moeda. Recuperado a 13 de Dezembro de 2010 de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/recursos/Lists/Repositrio%20Recursos2/Attachments/158/programa_Matematica_2Ciclo02.pdf.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf)

Ministério da Educação (2008). *Tópicos a leccionar aos alunos do programa anterior na entrada do 3.º, 5.º e 7.º anos.* (http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/topicos_leccionar_alunos_actualizado_25_nov.pdf)

Moreira, L. (2008). Resolvo problemas, logo penso. *Educação e Matemática*, *100*, 11-15.

NCTM (2001). *Normas para o currículo e avaliação escolar em Matemática escolar, colecção de Adendas, anos de escolaridade 5 – 8, Geometria nos 2.º e 3.º ciclos*. (Trad.) Lisboa: APM. (Obra original publicada em 1992).

NCTM (2008). *Princípios e normas para a Matemática Escolar*. (Trad.) Lisboa: APM. (Obra original publicada em 2000).

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia soft. *Educação e Matemática*, *100*, 11-15.

Pedemonte, B. (2000). *Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics.* Recuperado de a 15 de Maio de 2011 de http://wwwdidactique.imag.fr/preuve/Resumes/Pedemonte/Pedemonte01.PDF.

Ponte, J. P. & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interacções sociais nas investigações matemáticas. In P. Abrantes, L. C. Leal & J. P. Ponte (Orgs.), *Investigar para aprender Matemática* (pp.119-137). Lisboa: CIEFCUL e APM.

Ponte, J. P. & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no Ensino Básico. In GTI (Ed.), *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM. Recuperado de http://repositorio.ul.pt/bitstream/10451/3008/1/05-Ponte_GTI-tarefas-gestao.pdf

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, J. P., Oliveira, P. & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros – Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC (http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/002_Sequencia_Geometria_TrianguloseQuadrilateros_NPMEB_3c%28actual17maio2010.pdf)

Ramos, C. (2009). *A argumentação na aula de Matemática: um estudo colaborativo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Rodrigues, M. (2009). As capacidades transversais no novo programa do ensino básico: desafios à sua integração. *Educação e Matemática*, *105*, 38-40.

Saraiva, M. J. (2008). Raciocinar em Matemática com imagens vagas e com intuição. *Educação e Matemática*, *100*, 29-32.

Steen, L. (1999) Twenty questions about mathematical reasoning. In Leo Stiff (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12* (pp. 37-44). Reston, Va: NCTM.

Veloso, E. (1998). *Geometria: Temas actuais*. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.

Bibliografia

Amorim, D. P. (2004). *Compêndio de Geometria*. Lisboa: Sociedade Portuguesa de Matemática.

Conceição, A., Almeida, M., Conceição, C. & Costa, R. (2010). *MSI 5 – matemática sob investigação – parte 1*. Porto: Areal Editores.

NCTM (2001). *Geometria nos 2.º e 3. Ciclos – normas para o currículo e avaliação em matemática escolar, colecção adendas, anos de escolaridade 5 – 8*. Lisboa: APM. (Obra original publicada em 1992)

Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Exercícios de matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Neves, M. A. F., Leite, A., Silva, A. P. & Silva, J. N. (2010). *Matemática – parte 2: matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Palma, A. (1956). *Elementos de Geometria para os 3., 4., 5. anos dos liceus*. Lisboa: Livraria didáctica.

Serra, M. (2008). *Discovering geometry*. Berkley: Key Curriculum Press.

Anexos

Anexo I – Planos de Aula

Primeira aula (26 de Abril de 2011)

<table>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria
Tópico: Figuras no plano (2.º ciclo)
Sub-tópicos: Ângulos - amplitude e medição.</td><td colspan="2">Lições Números: 109 e 110
Data: 26/04/2011
Sala: 12</td></tr>
<tr><td><u>Sumário</u>
Revisões dos conhecimentos do 2.º ciclo sobre ângulos.
Relações entre pares de ângulos.</td><td colspan="2">Conhecimentos prévios
• Noção de ângulo
• Classificação de ângulos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objectivos
• Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos;
• Identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos;
• Formular, testar e demonstrar conjecturas;
• Fazer demonstrações simples;
• Raciocinar dedutivamente.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos / Materiais
• Computador com possibilidade de acesso ao GeoGebra;
• Quadro interactivo;
• Ficha de trabalho “Ângulos verticalmente opostos”;
• Ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”;
• Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”;
• Ficheiro de GeoGebra def+class_angulo.ggb;
• Ficheiro de GeoGebra ang_vert_oposto_original.ggb;
• Manual de Matemática do 7.ºano (Parte II);
• Ficha de trabalho “Manual do utilizador”.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento da aula</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Revisão em grande grupo da noção de ângulo, bem como da sua classificação.
2.1.- Projectar o ficheiro de GeoGebra def+class_angulo.ggb;
2.1.1 Deixar que o ficheiro corra até ao fim do aparecimento das</td><td>15 min</td></tr>
</table>

rectas;

2.1.2 Questionar os alunos relativamente ao que entendem por ângulo

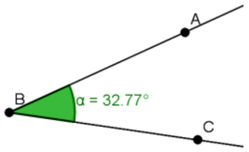
2.1.3 Pedir aos alunos que utilizando a figura, procurem explicar o que é um ângulo;

2.1.4 Permitir que o ficheiro avance mostrando as diferentes representações do ângulo FGB;

2.1.5 Questionar os alunos se as marcações existentes na figura correspondem ou não ao mesmo ângulo;

2.1.6 Atendendo às respostas obtidas, apresentar a definição de ângulo, para que os alunos registem:

Ângulo é a região do plano limitada por duas semi-rectas que possuem a mesma origem, que se designa por vértice do ângulo.



2.1.7 Salientar a diferença entre ângulo e amplitude de um ângulo;

2.1.8 Chamar a atenção dos alunos para a notação para ângulos (ângulo ABC), assim como para a notação utilizada para amplitude de um ângulo (∠ABC);

2.2.- Questionar os alunos relativamente ao significado de ângulos congruentes e explicar que dois ângulos congruentes são ângulos que têm a mesma amplitude;

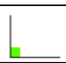
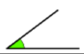
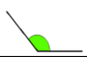
2.2.1 Pedir a um aluno (voluntário) que meça alguns dos ângulos da figura;

2.2.2 Pedir aos alunos que indiquem alguns pares de ângulos congruentes;

2.3.- Questionar os alunos relativamente ao tipo de ângulos que conhecem;

2.3.1 Apresentar os últimos ângulos do ficheiro e pedir aos alunos que os classifiquem;

2.3.2 Apresentar a tabela que sintetiza a classificação de ângulos:

					
Ângulo	**Recto**	**Agudo**	**Obtuso**	**Raso**	**Giro**
Medida da	90º	Entre 0º e	Entre 90º e	180º	360º

amplitude		90º	180º		

2.3.3 Pedir aos alunos que indiquem um ângulo de cada tipo.

3) Distribuição da ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho:

- ❖ Indicação que a ficha será realizada no *GeoGebra*, a pares;
- ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem.

4) Realização a pares da ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos".

- ❖ Caso os alunos não consigam progredir nas suas investigações, poderei:
  - Sugerir aos alunos que meçam os ângulos existentes na figura;
  - Sugerir que procurem ângulos congruentes;
  - Sugerir que arrastem os pontos, de modo a experimentar outros casos;
  - Sugerir que analisem o caso em que as rectas são perpendiculares.

15 min

5) Discussão dos resultados obtidos pelos alunos e realização de uma síntese a partir das conclusões por eles retiradas.

5.1.- Após a conclusão da ficha de trabalho os alunos devem regressar aos seus respectivos lugares.

5.2.- Projectar o ficheiro *GeoGebra* **anguloverticaloposto_original.ggb**.

5.3.- Pedir aos alunos que indiquem quais os pares de ângulos verticalmente opostos existentes na figura.

5.4.- Pedir a um par de alunos que apresente as conclusões que retiram, relativamente aos ângulos verticalmente opostos e que expliquem em que se basearam e porque lhes parece verdadeira;

5.5.- Perguntar à turma se mais alguém chegou às mesmas conclusões e o que pensam em relação às conjecturas apresentadas, pedindo que justifiquem a sua opinião;

5.6.- Como síntese, salientar e registar a relação existente entre os ângulos verticalmente opostos:

Dois ângulos verticalmente opostos são congruentes.

5.7.- Colocar aos alunos algumas questões, de modo a que compreendam a necessidade de realizar uma demonstração:

20 min

5.7.1 Perguntar se a relação que obtiveram se verifica sempre;

5.7.2 Perguntar como o podem ter a certeza de que tal é verdade;

5.7.3 Perguntar a razão pela qual a relação é válida;

5.8.- Com a colaboração dos alunos, construir a tabela seguinte, utilizando os valores dados pelo *GeoGebra*:

α	β	α+β	γ	β	β+γ

5.8.1 Pedir exemplos aos alunos dos ângulos α, β e γ;

5.8.2 Utilizando o contra-exemplo, atribuir valores distintos a α e a γ e concluir que β seria diferente.

5.9.- Realização de uma demonstração informal da propriedade interior

5.9.1 Questionar os alunos em relação ao valor da soma dos ângulos α e β e registar no quadro $\boxed{\alpha + \beta = 180°}$;

5.9.2 Questionar os alunos em relação ao valor da soma dos ângulos β e γ e registar no quadro $\boxed{\beta + \gamma = 180°}$;

5.9.3 Questionar os alunos em relação ao que se pode concluir e registar que $\boxed{\alpha + \beta = \beta + \gamma}$ e que, portanto, $\boxed{\alpha = \gamma}$.

---

6) Distribuição da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho:

- ❖ Indicação de que a ficha será realizada, a pares, no *GeoGebra*;
- ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem;
- ❖ Indicação de que é para resolverem apenas as questões 1 e 2.

7) Realização das questões 1 e 2 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I".

- ❖ Caso os alunos não consigam progredir nas suas investigações, poderei:
  - Questionar quantos pares de ângulos alternos internos existem;
  - Sugerir que procurem os pares de ângulos congruentes;
  - Sugerir que registem alguns exemplos das explorações que realizaram (por exemplo, numa tabela).

10 min

8) Discussão dos resultados obtidos e realização de uma síntese a partir das conclusões obtidas. **8.1.-** Após a conclusão da ficha de trabalho os alunos devem regressar aos seus respectivos lugares. **8.2.-** Na questão 1, pedir a um aluno que elabore a construção pedida, utilizando o quadro interactivo. **8.3.-** Na questão 2.1: **8.3.1** Pedir a um aluno que identifique os pares de ângulos alternos internos; **8.3.2** Questionar a turma relativamente à escolha realizada pelo colega; **8.3.3** Questionar os alunos se existirá mais algum par de ângulos alternos internos; **8.4.-** Na questão 2.2: **8.4.1** Pedir a um par de alunos que apresente as suas conclusões e que expliquem em que se basearam e porque lhes parece verdadeira; **8.4.2** Questionar a turma se mais alguém chegou às mesmas conclusões e sobre o pensam em relação às conjecturas apresentadas, pedindo que justifiquem a sua opinião. ❖ As conjecturas a apresentar serão seleccionadas a partir da observação do trabalho dos alunos durante a realização da tarefa, podendo contemplar, também, a apresentação de conjecturas que não sejam verdadeiras. **8.5.-** Na síntese, ter em atenção a necessidade de, a partir das conclusões dos alunos, salientar a relação de congruência entre os ângulos alternos internos: Se as rectas são estritamente paralelas então os ângulos alternos internos são congruentes.	10 min
9) Realização de algumas questões do manual, em grande grupo, apelando à participação dos alunos: **9.1.-** Página 13, questão 1, 2 e 5;	10 min
10) Distribuição da ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I” para trabalho de casa.	

<table>
<tr>
<td>Trabalhos para casa
• Ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”, questão 3.
• Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”.</td>
<td>Tarefas Extra
• Página 13, questão 3, 4;
• Página 38, questão 2.</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">Avaliação
As fichas de trabalho realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.
Os ficheiros de GeoGebra realizados no decorrer da tarefa serão também recolhidos para análise posterior.</td>
</tr>
</table>

Segunda aula (28 de Abril de 2011)

Unidade Temática: Geometria **Tópico**: Figuras no plano (2.º ciclo) **Sub-tópicos:** Ângulos - amplitude e medição.	**Lições Números**: 111 e 112 **Data**: 28/04/2011 **Sala**: 12
<u>Sumário</u> Continuação da aula anterior. Resolução de uma ficha sobre relações entre pares de ângulos.	**Conhecimentos prévios** • Noção de ângulo; • Classificação de ângulos; • Ângulos verticalmente opostos.

Objectivos

- Estabelecer relações entre ângulos e classificar ângulos;
- Identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos;
- Formular e testar conjecturas;
- Raciocinar dedutivamente.

Recursos / Materiais

- Computador com possibilidade de acesso ao *GeoGebra*;
- Quadro interactivo;
- Ficha de trabalho "Relações entre ângulos I";
- Ficha de trabalho "Relações entre ângulos II";
- Ficha de trabalho "T.P.C. – Ângulos II";
- Ficheiro de *GeoGebra* **relacaoanguloI.ggb**;
- Ficheiro *GeoGebra* **ang_alt_int.ggb**;
- Manual de Matemática do 7.ºano (Parte II).

Desenvolvimento da aula	Tempo previsto
1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam. Recolha do trabalho de casa: ficha de trabalho "T.P.C. – Ângulos I".	10 min
2) Revisão dos principais conceitos da aula anterior. **2.1.-** Questionar os alunos relativamente ao que aprenderam na última aula; **2.2.-** Projectar o ficheiro *GeoGebra* **relacaoanguloI.ggb**; **2.3.-** Pedir a um aluno que assinale o ângulo HAG; **2.4.-** Pedir a outro aluno que indique um ângulo obtuso;	15 min

2.4.1 Utilizar as informações fornecidas pelo aluno para introduzir a notação de ângulo; **2.4.2** Pedir aos aluno que utilizem a notação para indicar ângulos; **2.5.-** Questionar os alunos sobre se, na figura, existem ângulos verticalmente opostos; **2.6.-** Pedir a um aluno que indique um par de ângulos verticalmente opostos; **2.6.1** Utilizando o exemplo, fornecido pelo aluno introduzir a notação de amplitude; **2.6.2** Pedir aos alunos que escrevam as amplitudes de mais ângulos, usando a notação; **2.7.-** Questionar os alunos se dois ângulos verticalmente opostos são sempre agudos (ou obtusos, de acordo com o exemplo dado pelo aluno); **2.8.-** Pedir aos alunos que na aula anterior exploraram a situação com as rectas perpendiculares, para apresentarem a conclusão a que chegaram; **2.9.-** Mover a recta secante de modo a obter uma recta perpendicular. ❖ Caso seja necessário, para uma melhor compreensão, poderão ser pedidos aos alunos mais exemplos, que possibilitem a utilização da notação introduzida.	
3) Distribuição da ficha de trabalho “Relações entre ângulos I” aos alunos e indicação da metodologia de trabalho: **3.1.-** Entregar as fichas aos alunos; **3.2.-** Interpretar a ficha de trabalho conjuntamente com a turma: **3.2.1** Analisar a definição de ângulos alternos internos; **i)** Questionar os alunos sobre o que é uma recta secante; **ii)** Salientar que, fazendo alusão ao facto de estarem sinalizados a cores distintas: (a) α e β são ângulos alternos internos; (b) γ e δ são ângulos alternos internos; **iii)** Explicar a origem do nome de ângulos alternos internos: (a) Internos devido ao facto de se encontrarem entre as duas	5 min

rectas consideradas (r e s); (b) Alternos porque se encontram em lados diferentes relativamente à recta secante; **3.2.2** Pedir a um aluno que de acordo com a definição indique um par de ângulos alternos internos, na figura dada. ❖ Indicação de que a ficha será realizada, a pares, no *GeoGebra*; ❖ Indicação de que a construção pedida na questão 1, se encontra no ficheiro de *GeoGebra* **relacaoanguloI.ggb**, guardado na pasta 7ºC no ambiente de trabalho; ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas os raciocínios que utilizem. **4)** Realização da ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”. ❖ Caso os alunos não consigam progredir nas suas investigações, poderei: ▪ Questionar quantos pares de ângulos alternos internos existem; ▪ Sugerir que procurem os pares de ângulos congruentes.	10 min
5) Discussão dos resultados obtidos e realização de uma síntese a partir das conclusões obtidas. **5.1.-** Após a conclusão da ficha de trabalho os alunos devem regressar aos seus lugares. **5.2.-** Na questão 2: **5.2.1** Pedir a um aluno que identifique os pares de ângulos alternos internos; **5.2.2** Questionar a turma relativamente à escolha realizada pelo colega; **5.2.3** Questionar os alunos se existirá mais algum par de ângulos alternos internos; **5.3.-** Na questão 3: **5.3.1** Pedir a um par de alunos que apresente as suas conclusões e que expliquem em que se basearam e porque lhes parece verdadeira; **5.3.2** Questionar a turma se mais alguém chegou às mesmas conclusões e sobre o pensam em relação às conjecturas apresentadas, pedindo que justifiquem a sua opinião. ❖ As conjecturas a apresentar serão seleccionadas a partir da observação	20 min

do trabalho dos alunos durante a realização da tarefa, podendo contemplar, também, a apresentação de conjecturas que não sejam verdadeiras.

5.4.- Como conclusão, registar a relação de congruência entre os ângulos alternos internos:

Se as rectas são estritamente paralelas então os ângulos alternos internos são congruentes.

5.5.- Com recurso ao *GeoGebra* apresentar exemplos que corroborem a relação entre o paralelismo e a congruência dos ângulos alternos internos:

5.5.1 Questionar os alunos se não sendo as rectas paralelas poderão tirar a mesma conclusão relativamente aos ângulos alternos internos;

5.5.2 A partir do ficheiro *GeoGebra* **ang_alt_int.ggb**, mostrar uma outra figura com uma nova recta "próxima" da paralela;

5.5.3 Medir os ângulos que se obtêm;

5.5.4 Questionar os alunos sobre se conseguem retirar alguma relação entre os ângulos;

5.5.5 Mover a recta, para que os alunos possam analisar vários casos;

5.5.6 Questionar os alunos sobre se será possível que existam ângulos alternos internos congruentes sem que as rectas sejam paralelas;

5.6.- Fazer um levantamento das conjecturas formuladas pelos alunos na questão 4:

5.6.1 Pedir aos alunos que apresentem as conclusões a que chegaram, explicando como procederam;

❖ Se as conjecturas não incluírem os casos dos ângulos correspondentes e dos ângulos alternos externos, fazer surgi-los.

5.6.2 Registar as conclusões apresentadas;

5.6.3 Questionar a turma, relativamente, ao que pensam de cada uma das conjecturas, pedindo que justifiquem as suas opiniões;

5.6.4 Para as conjecturas verdadeiras, procurar construir conjuntamente com os alunos, pequenas cadeias dedutivas a partir

das propriedades estudadas na última aula (ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos); **5.6.5** Caso alguma das conjecturas apresentadas seja falsa, dar um contra-exemplo da mesma.	
6) Distribuição da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho: ❖ Indicação de que a ficha de trabalho será realizada a pares; ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem; ❖ Indicação de que é para realizar apenas a questão 1. **7)** Realização, a pares, da questão 1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II".	5 min
8) Correcção e discussão da questão 1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". **8.1.-** Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução da alínea 1.1.1. da questão 1; **8.2.-** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **8.3.-** Prosseguir com a correcção das restantes alíneas da questão 1 seguindo a estratégia anterior. ❖ As resoluções a apresentar serão seleccionadas tendo em conta observação do trabalho dos alunos durante a realização da tarefa, podendo também incluir algumas resoluções que apresentem incorrecções comuns.	10 min
9) Realização, em grande grupo, da questão 2.1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". **9.1.-** Questionar os alunos relativamente ao que é pedido nesta alínea; **9.2.-** Questionar os alunos sobre quais das relações entre pares de ângulos estudadas podem ser utilizadas; **9.3.-** Questionar os alunos se a partir dessas propriedades é possível tirar alguma conclusão sobre a amplitude do ângulo *x* ou sobre a amplitude do ângulo *y*; **9.4.-** Questionar os alunos sobre como podem obter o valor da amplitude	5 min

de *x*; **9.5.-** Questionar os alunos se seria necessário determinar primeiro o *y* para se obter o *x*; **9.6.-** Questionar os alunos sobre como se poderia resolver a questão optando por obter primeiro o valor de *x*; **9.7.-** Chamar a atenção dos alunos para a possibilidade de existir mais do que um caminho válido; **9.8.-** Chamar ainda a atenção para a necessidade de justificar todos os passos utilizando as relações que conhecem entre os ângulos. ❖ Caso as respostas dos alunos sejam no sentido de se calcular primeiro o ângulo *x*, as questões a colocar continuaram nessa linha, apresentando-se no fim a alternativa de calcular o *y* em primeiro lugar; ❖ A justificação para o ângulo *x* pode ser alterada consoante as respostas dos alunos apontem para o ângulo de 30º ou para o ângulo *y*. **10)** Realização, a pares, das restantes alíneas da questão 2 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II" ❖ Caso surjam dúvidas na alínea 2.5, sugerir aos alunos que prolonguem os segmentos de recta da figura.	10 min
11) Distribuição da ficha de trabalho "T.P.C. – Ângulos II" para trabalho de casa.	

Trabalhos para casa	**Tarefas Extra**
• Concluir a ficha de trabalho "Relações entre ângulos II"; • Ficha de trabalho "T.P.C. – Ângulos II".	• Página 38, questões 3 e 5.

Avaliação

As fichas de trabalho realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.

Terceira aula (3 de Maio de 2011)

<table>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Geometria
Tópico: Figuras no plano (2º ciclo)
Sub-tópicos: Ângulos: amplitude e medição.</td><td>Lições Números: 113 e 114
Data: 03/05/2011
Sala: 14</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Sumário</u>
Ângulos complementares e suplementares.
Resolução de uma ficha de trabalho.</td><td>Conhecimentos prévios
• Noção e classificação de ângulos;
• Ângulos verticalmente opostos;
• Ângulos alternos internos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objectivos
• Distinguir ângulos complementares e suplementares e identificar ângulos verticalmente opostos e ângulos alternos internos;
• Raciocinar dedutivamente;
• Demonstrar conjecturas.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos / Materiais
• Ficha de trabalho “Ângulos verticalmente opostos”;
• Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”;
• Ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”;
• Ficha de trabalho “Relações entre ângulos II”;
• Ficha de trabalho “T.P.C – Relações entre ângulos III”;
• Powerpoint correcao_tpc_angulos_I.ppt;
• Manual de Matemática do 7.ºano (Parte II).</td></tr>
<tr><td colspan="2">Desenvolvimento da aula</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="2">1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam.</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="2">2) Entrega aos alunos das fichas de trabalho realizadas nas últimas duas aulas, bem como dos trabalhos de casa da aula anterior:
2.1.- Ficha de trabalho “Ângulos verticalmente opostos;
2.2.- Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”
2.3.- Ficha de trabalho “Relações entre ângulos I”</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">3) Discussão do trabalho de casa: ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”.
3.1.- Projectar o powerpoint correcao_tpc_angulos_I.ppt;</td><td>10 min</td></tr>
</table>

3.2.- Chamar a atenção dos alunos para: **3.2.1** A forma de assinalar os ângulos; **3.2.2** O facto de ângulo obtuso ter não só mais de 90º, mas também menos de 180º; **3.2.3** A forma de assinalar ângulos rasos; **3.2.4** A definição de ângulos verticalmente opostos, salientando a necessidade de terem o vértice comum; **3.3.-** Apresentar o último slide e pedir a um aluno para assinalar um par de ângulos alternos internos.	
4) Discussão da questão 3 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos I". **4.1.-** Pedir ao Rodrigo que explique a conjectura a que o par chegou, pedindo que justifique porque pensa que é verdadeira; Se a recta secante for perpendicular as rectas paralelas encontra-se oito angulos congruentes. **4.1.1** Registar a conjectura do aluno; **4.1.2** Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam sobre a conjectura apresentada pelo colega; **4.1.3** Elaborar um esboço da situação apresentada; **4.1.4** Questionar os alunos sobre qual a razão pela qual a conjectura apresentada é verdadeira; **4.2.-** Pedir à Sofia que explique a conjectura a que o par chegou, pedindo que justifique porque pensa que é verdadeira; Qualquer ângulo da figura tem um ângulo com a mesma amplitude. **4.2.1** Registar a conjectura da aluna; **4.2.2** Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam sobre a conjectura apresentada pelo colega; **4.2.3** Elaborar um esboço da situação apresentada; **4.2.4** Questionar os alunos sobre qual a razão pela qual a conjectura apresentada é verdadeira;	15 min

4.2.5 A partir das respostas dos alunos, registar a justificação

Cada um dos ângulos da figura tem um ângulo verticalmente oposto. Como os ângulos verticalmente opostos são congruentes, cada ângulo tem um ângulo congruente a ele.

matemática da conjectura apresentada:

4.3.- Pedir ao Daniel que explique a conjectura a que o par chegou, pedindo que justifique porque pensa que é verdadeira;

Os ângulos alternos externos ~~são~~ também ~~são~~ ~~congru~~ são congruentes (os pares são : HAG e FCE ; DCE e GAB)

4.3.1 Registar a conjectura do aluno;

4.3.2 Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam sobre a conjectura apresentada pelo colega;

4.3.3 Utilizar o esboço anterior, para assinalar;

4.3.4 Questionar os alunos sobre qual a razão pela qual a conjectura apresentada é verdadeira;

4.3.5 A partir das respostas dos alunos, registar a justificação matemática da conjectura apresentada:

O ângulo HAG é congruente com o ângulo BAC, pois são ângulos verticalmente opostos. O ângulo BAC é congruente com o ângulo DCA, pois são ângulos alternos internos. O ângulo DCA é congruente com o ângulo FCE, porque são ângulos verticalmente opostos. Logo, os ângulos HAG e FCE são congruentes.

5) Distribuição da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho:

- ❖ Indicação de que a ficha de trabalho será realizada a pares;
- ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem;
- ❖ Indicação de que é para realizar apenas a questão 1.

6) Realização a pares da questão 1 da ficha de trabalho "Relações entre   5 min

ângulos II". **7)** Correcção e discussão da questão 1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". **7.1.-** Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução da alínea 1.1.1. da questão 1; **7.2.-** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **7.3.-** Prosseguir com a correcção das restantes alíneas da questão 1 seguindo a estratégia anterior. ❖ As resoluções a apresentar serão seleccionadas tendo em conta observação do trabalho dos alunos durante a realização da tarefa, podendo também incluir algumas resoluções que apresentem incorrecções comuns.	10 min
8) Realização, em grande grupo, da questão 2.1 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". **8.1.-** Questionar os alunos relativamente ao que é pedido nesta alínea; **8.2.-** Questionar os alunos sobre quais as relações entre pares de ângulos estudadas que podem ser utilizadas; **8.3.-** Questionar os alunos se a partir dessas propriedades é possível tirar alguma conclusão sobre o ângulo x ou sobre o ângulo y; **8.4.-** Registar que: $\angle y = 30°$, porque y é verticalmente oposto ao ângulo de 30º. **8.5.-** Questionar os alunos sobre como podem obter o valor de x; **8.6.-** Registar que : Como $\angle x + 30° = 180°$, pois formam um ângulo raso, então $\angle x = 180° - 30° = 150°$. **8.7.-** Questionar os alunos se era necessário determinar primeiro o *y* para se obter o *x*; **8.8.-** Questionar os alunos sobre como se poderia resolver a questão optando por obter primeiro o valor de *x*; **8.9.-** Chamar a atenção dos alunos para a possibilidade de existir mais do que uma estratégia válida; **8.10.-** Chamar ainda a atenção para a necessidade de justificar todos os	10 min

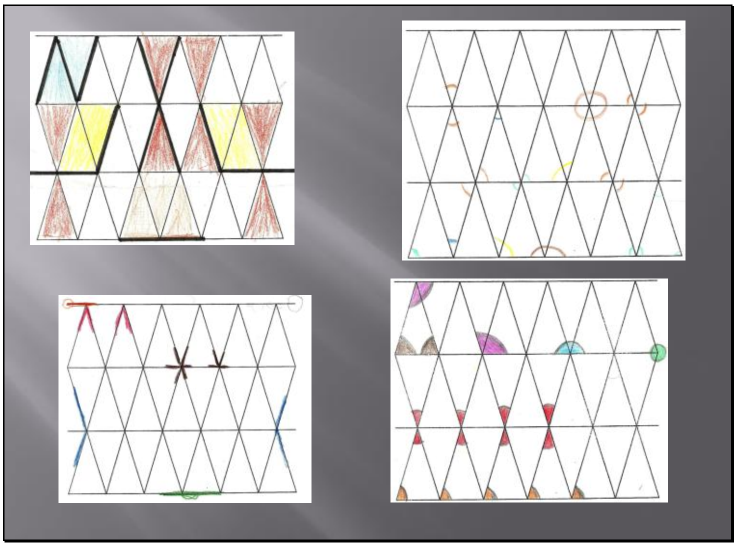
passos utilizando as relações que conhecem entre os ângulos. **8.11.-** Introduzir o conceito de ângulo suplementar: **8.11.1** Utilizar como referência os ângulos assinalados na figura desta questão, como exemplo de ângulos suplementares; **8.11.2** Registar que: Dois ângulos são **suplementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 180º. ❖ Caso as respostas dos alunos sejam no sentido de se calcular primeiro o ângulo *x*, as questões a colocar continuaram nessa linha, apresentando-se no fim a alternativa de calcular o *y* em primeiro lugar; ❖ A justificação para o ângulo *x* pode ser alterada consoante as respostas dos alunos apontem para o ângulo de 30º ou para o ângulo *y*.	
9) Realização, a pares, das restantes alíneas da questão 2 da ficha de trabalho “Relações entre ângulos II” ❖ Caso surjam dúvidas na alínea 2.5, sugerir aos alunos que prolonguem as rectas da figura.	15 min
10) Correcção e discussão alíneas 2.2 a 2.5 da questão 2 da ficha de trabalho “Relações entre ângulos II”. **10.1.-** Para a questão 2.2: **10.1.1** Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução; **10.1.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **10.1.3** Questionar a turma se alguém seguiu uma estratégia diferente; **10.1.4** Registar os raciocínios referidos; **10.2.-** Para a questão 2.3: **10.2.1** Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução; **10.2.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **10.2.3** Questionar a turma se alguém seguiu uma estratégia diferente; **10.2.4** Registar os raciocínios referidos; **10.3.-** Para a questão 2.4:	15 min

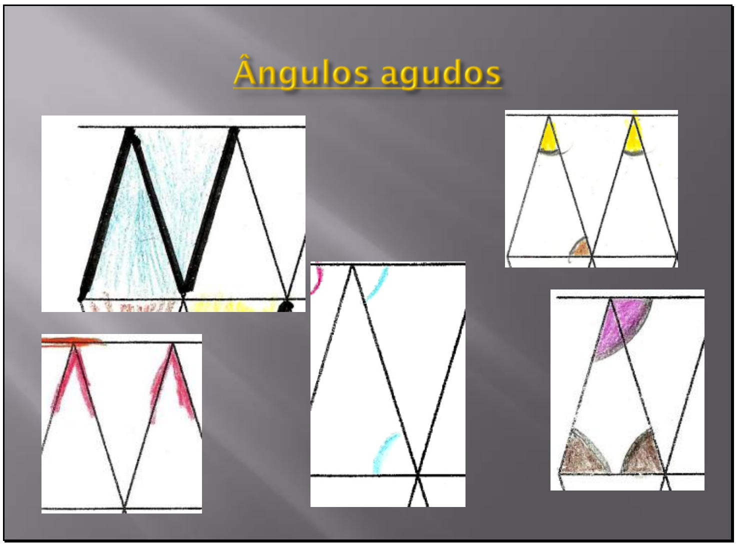
10.3.1 Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução; **10.3.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **10.3.3** Questionar a turma se alguém seguiu uma estratégia diferente; **10.3.4** Registar os raciocínios referidos; **10.3.5** Introduzir o conceito de ângulo complementar: **i)** Utilizar como referência os ângulos assinalados na figura desta questão, como exemplo de ângulos complementares; **ii)** Registar que: Dois ângulos são **complementares** se a soma das medidas das suas amplitudes é igual a 90º. **10.4.-** Para a questão 2.5: **10.4.1** Pedir a um par de alunos que apresente no quadro a sua resolução; **10.4.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **10.4.3** Questionar a turma se alguém seguiu uma estratégia diferente; **10.4.4** Registar os raciocínios referidos; ❖ As resoluções a apresentar serão seleccionadas tendo em conta observação do trabalho dos alunos durante a realização da tarefa, podendo também incluir algumas resoluções que apresentem incorrecções comuns.	
11) Distribuição da ficha de trabalho “T.P.C. – Relações entre ângulos III” para trabalho de casa. **12)** Recolha do trabalho de casa da aula anterior.	

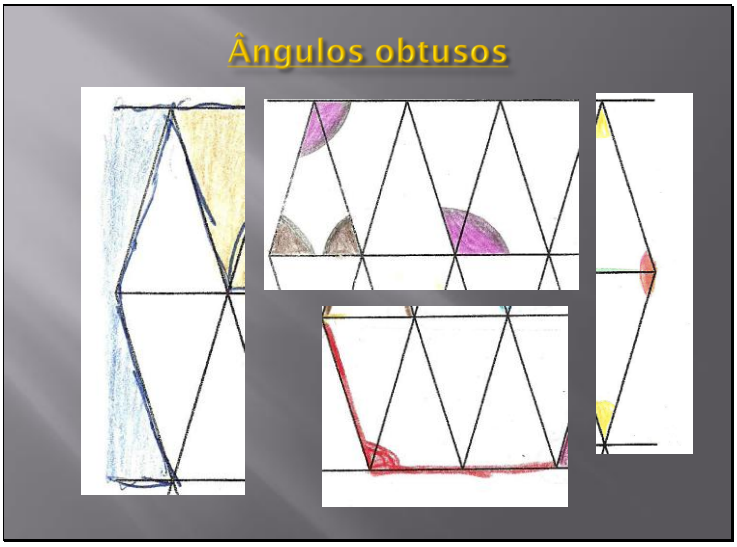
Trabalhos para casa	**Tarefas Extra**
Ficha de trabalho “T.P.C. – Relações entre ângulos III”.	• Página 13 questão 7 • Página 39 questão 8

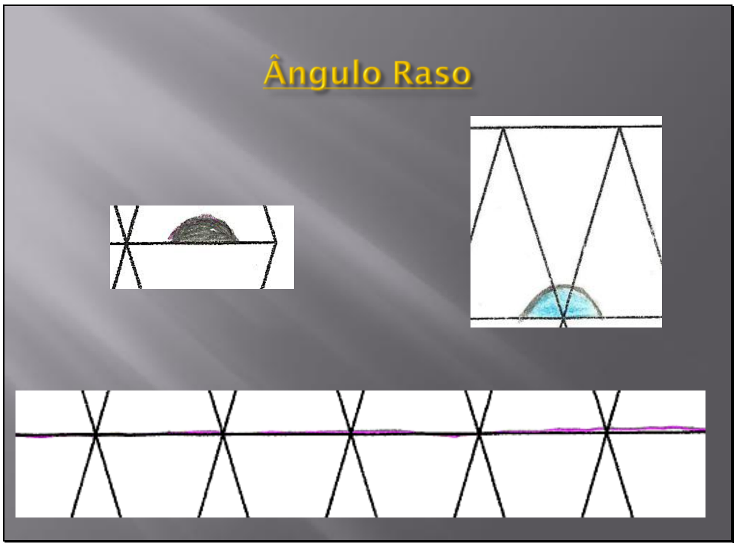
Avaliação
As tarefas realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.

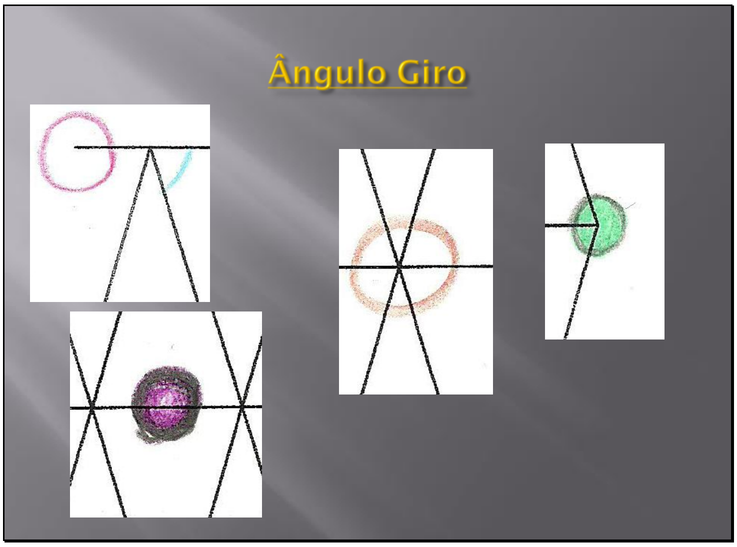
Powerpoint **correcao_tpc_angulos_I.ppt**

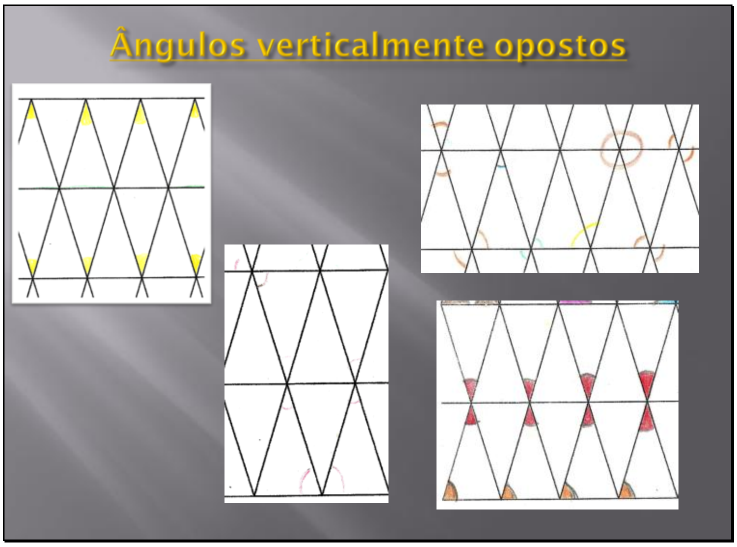


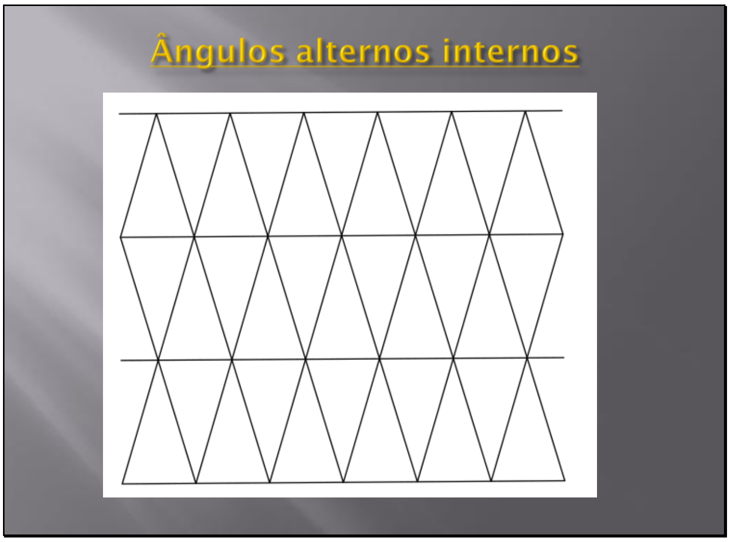





Ângulo Raso


Ângulo Giro


Ângulos verticalmente opostos


Ângulos alternos internos

Quarta aula (5 de Maio de 2011)

<table>
<tr><td>Unidade Temática: Geometria
Tópico: Triângulos e Quadriláteros
Sub-tópicos: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</td><td>Lições Números: 115 e 116
Data: 05/05/2011
Sala: 12</td></tr>
<tr><td>Conhecimentos prévios
• Noção de ângulo.
• Classificação de ângulos
• Ângulos verticalmente opostos
• Distinguir ângulos complementares de ângulos suplementares;
• Ângulos alternos internos.</td><td><u>Sumário</u>
Correcção do TPC.
Ângulos internos de um triângulo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Objectivos
• Compreender e deduzir o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo;
• Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples;
• Utilizar o raciocínio dedutivo.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Recursos
• Ficha de trabalho “Relações entre ângulos II”;
• Ficha de trabalho “Ângulos internos de um Triângulo”;
• Ficha de trabalho “Triângulos”;
• Ficha de trabalho “T.P.C. – Relação entre ângulos III”;
• Projector de video;
• Ficheiro powerpoint “triangulos.pptx”;
• Manual de Matemática do 7.º ano (Parte II).</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula	Tempo previsto
1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam e dos que	10 min

realizaram o trabalho de casa.	
2) Correcção e discussão do trabalho de casa: alíneas 1.1.3, 1.2 e 2.2 a 2.5 da ficha de trabalho "Relações entre ângulos II". **2.1.-** Para a alínea 1.1.3 da questão 1: **2.1.1** Pedir a aluno que apresente no quadro a sua resolução; **2.1.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **2.2.-** Para as questões 1.2, 2.2, 2.3, 2.4 e 2.5: **2.2.1** Pedir a um aluno que apresente no quadro a sua resolução; **2.2.2** Questionar a turma se concordam com a resposta do colega ou se chegaram a outra conclusão; **2.2.3** Questionar a turma se alguém seguiu uma estratégia diferente.	20 min
3) Introdução à soma dos ângulos internos de um triângulo **3.1.-** Questionar os alunos relativamente ao que é um ângulo interno de um triângulo; **3.2.-** Projectar o ficheiro powerpoint "**triangulos.pptx**"; **3.3.-** Questionar os alunos sobre se acham que pode existir alguma propriedade comum a todos os triângulos, no que diz respeito aos ângulos.	5 min
4) Distribuição da ficha de trabalho "Ângulos internos de um Triângulo I" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho: ❖ Indicação de que a ficha será realizada a pares; ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem. **5)** Realização, a pares, da ficha de trabalho "Ângulos internos de um Triângulo I". **5.1.-** Na questão 1, caso surjam dúvidas, poderei questionar os alunos sobre: **5.1.1** Qual o ângulo que se obtêm somando os ângulos ABD, ABC e CBE; **5.1.2** Como se pode classificar esse ângulo. **5.2.-** Na questão 2, caso surjam dúvidas, poderei sugerir, aos alunos, que: **5.2.1** Tentem prolongar os lados do triângulo;	10 min

5.2.2 Recordem as propriedades dos ângulos trabalhadas nas últimas aulas e verifiquem quais as que se podem aplicar à situação em estudo. **5.3.-** Na questão 3, caso surjam dúvidas, poderei sugerir, aos alunos, que: **5.3.1** Verifiquem quais os ângulos que são congruentes aos ângulos internos do triângulo; **5.3.2** Comparem os ângulos internos do triângulo com os ângulos referidos na questão 1. **5.4.-** Na questão 4, caso surjam dúvidas, poderei sugerir, aos alunos, que: **5.4.1** Desenhem um triângulo de outro tipo (equilátero, isósceles, rectângulo ou obtusângulo); **5.4.2** Tracem uma paralela a outro lado do triângulo, passando por outro vértice e verifiquem o que obtêm. **6)** Apresentação, discussão e síntese dos resultados obtidos pelos alunos. **6.1.-** Para a questão 1: **6.1.1** Identificar com a ajuda dos alunos quais os ângulos em causa; **6.1.2** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução; **6.1.3** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma outra conclusão, pedindo que justifiquem as suas afirmações. **6.2.-** Para a questão 2: **6.2.1** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução; **6.2.2** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma outra conclusão, pedindo que justifiquem as suas afirmações. ❖ Os diferentes pares de ângulos congruentes deverão ser assinalados na figura com cores distintas. ❖ Caso seja necessário, para facilitar a compreensão de quais os ângulos congruentes e da justificação, poder-se-á prolongar os lados do triângulo. **6.3.-** Para a questão 3: **6.3.1** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução; **6.3.2** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma outra conclusão,	15 min

pedindo que justifiquem as suas afirmações.

6.4.- Registar o resultado matemático obtido pelos alunos:

> A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

6.5.- Reorganizar as respostas obtidas às questões 1.1, 1.2 e 1.3 formando assim uma pequena demonstração;

6.5.1 Apelando à participação dos alunos, registar que

> A recta DE é paralela ao lado AC, então:
>
> - $\angle BAC = \angle ABD$, porque os ângulos BAC e ABD são ângulos alternos internos;
> - $\angle BCA = \angle CBE$, porque os ângulos BCA e CBE são ângulos alternos internos.
>
> $\angle ABD + \angle ABC + \angle CBE = 180°$, porque os ângulos ABD, ABC e CBE formam um ângulo raso.
>
> Logo, $\angle BCA + \angle ABC + \angle BCA = 180°$.

6.6.- Para a questão 4:

6.6.1 Questionar os alunos sobre qual a resposta que deram a esta questão;

6.6.2 Desenhar um triângulo isósceles;

6.6.3 Questionar os alunos se a soma dos ângulos deste triângulo também é 180º, pedindo que justifiquem a sua opinião;

6.6.4 Questionar os alunos se conseguem construir um triângulo em que não seja possível fazer o raciocínio tarefa;

6.6.5 Questionar os alunos sobre quando é que a conclusão que retiraram é verdadeira;

6.6.6 Concluir que independentemente do triângulo que se considere, esta conclusão é sempre válida, uma vez que podemos sempre aplicar esta estratégia.

---

7) Distribuição da ficha de trabalho "Triângulos I" aos alunos e indicação da metodologia de trabalho:

- ❖ Indicação de que a ficha será realizada a pares;
- ❖ Indicação de que devem registar na ficha de trabalho todas as estratégias que utilizem.

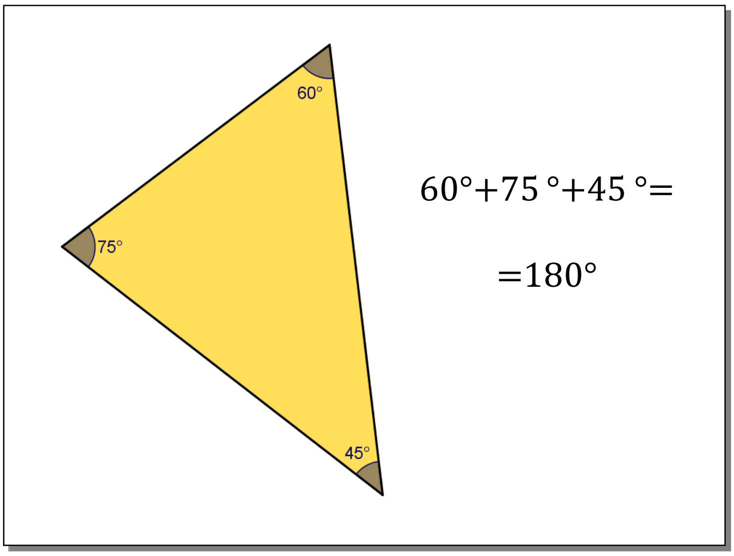
8) Resolução, a pares, da ficha de trabalho "Triângulos I". — 20 min

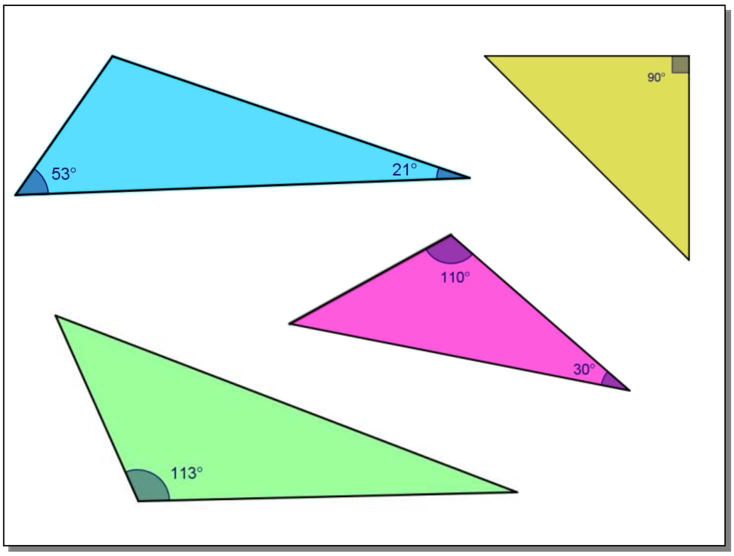
<table>
<tr><td>❖ Caso seja necessário poderei fazer em grande grupo as questões 1.1 e 2.1 e solicitar aos alunos que realizem as questões 1.2 e 2.2 a pares.
9) Correcção e discussão da ficha de trabalho “Triângulos I”.
9.1.- Para as questões 1 e 2:
9.1.1 Pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro;
9.1.2 Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se seguiram uma estratégia diferente ou chegaram a outra conclusão;
9.2.- Para a questão 3:
9.2.1 Pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro;
9.2.2 Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se seguiram uma estratégia diferente ou chegaram a outra conclusão;
9.2.3 Questionar os alunos sobre se, a partir dos dados que dispõe após a resolução da questão, conseguem encontrar paralelas.</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td>10) Distribuição da ficha de trabalho “T.P.C. – Relações entre ângulos III” para trabalho de casa.</td><td></td></tr>
</table>

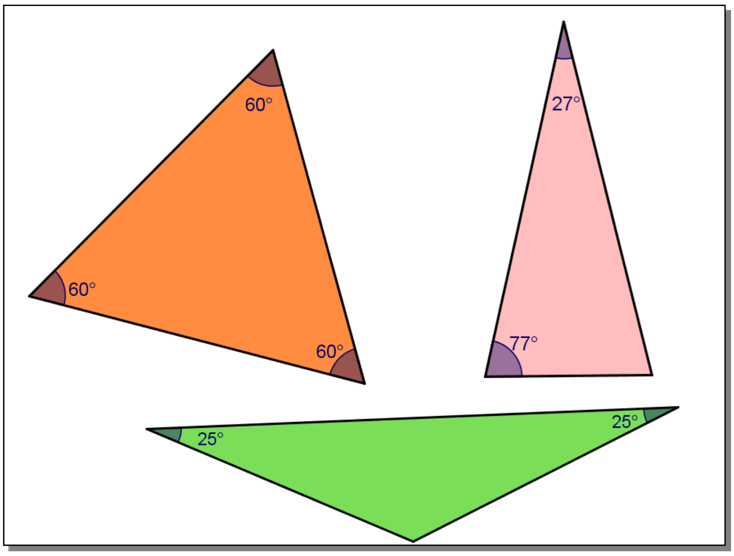
Trabalhos para casa	**Tarefas Extra**
Ficha de trabalho “T.P.C. – Relações entre ângulos III”	• Página 39, questão 8 • Página 39, questão 6

Avaliação
As tarefas realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.

Powerpoint “**triangulos.pptx**”;







Quinta aula (10 de Maio de 2011)

<table>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Geometria
Tópico: Triângulos e Quadriláteros
Sub-tópicos: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</td><td>Lições Números: 117 e 118
Data: 10/05/2011
Sala: 12</td></tr>
<tr><td><u>Sumário</u>
Conclusão da aula anterior.
Resolução de uma ficha de trabalho sobre ângulos internos de um triângulo.
Ângulos externos de um triângulo.</td><td colspan="2">Conhecimentos prévios
• Ângulos verticalmente opostos;
• Ângulos alternos internos.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Objectivos
• Deduzir o valor da soma de ângulos internos de um triângulo;
• Compreender a noção de ângulo externo de um triângulo;
• Formular, testar e demonstrar conjecturas;
• Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Recursos / Materiais
• Computador com possibilidade de acesso ao GeoGebra;
• Quadro interactivo;
• Ficha de trabalho “Ângulos internos de um Triângulo”;
• Ficha de trabalho “Triângulos”;
• Ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo”;
• Ficheiro GeoGebra ang_int_triang.ggb;
• Ficheiro GeoGebra anguloexternoI.ggb;
• Manual de Matemática do 7.ºano (Parte II);
• Calculadora.</td></tr>
</table>

Desenvolvimento da aula	Tempo previsto
1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam. Recolha do trabalho de casa.	10 min
2) Conclusão da discussão e síntese da ficha de trabalho “Ângulos internos	10 min

de um Triângulo".

2.1.- Questionar os alunos sobre qual o objectivo da ficha de trabalho;

2.2.- Projectar o ficheiro *GeoGebra* **ang_int_triang.ggb**;

2.3.- Questionar os alunos sobre o valor da soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo;

2.4.- Chamar a atenção para o facto de termos procurado relacionar os ângulos internos do triângulo com os ângulos que formam o ângulo raso;

2.5.- Relembrar que os ângulos BAC e DBA são congruentes, bem como os ângulos BCA e CBE, uma vez que são alternos internos;

2.6.- Salientar que como os ângulos são congruentes e $\angle DBA + \angle ABC + \angle CBE = 180°$, podemos concluir que $\angle CAB + \angle ABC + \angle BCA = 180°$;

2.7.- Chamar a atenção dos alunos que a este tipo de raciocínio chamamos uma demonstração ou prova;

2.8.- Referir que uma demonstração é uma sequência de "passos", baseados em propriedades matemáticas, que nos permite chegar a uma conclusão;

2.9.- Questionar os alunos sobre qual a conclusão obtida neste caso;

2.10.- Registar o resultado matemático que acabaram de demonstrar:

A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.

2.11.- Colocar aos alunos a questão 4;

2.11.1 Movimentar os vértices do triângulo ABC de modo a obter um triângulo completamente diferente, como por exemplo um triângulo isósceles;

2.11.2 Questionar os alunos se a soma dos ângulos deste triângulo também é 180º, pedindo que justifiquem a sua opinião;

2.11.3 Mover os vértices do triângulo para salientar que poderiam fazer o mesmo tipo de raciocínio para outros triângulos diferentes;

2.11.4 Questionar os alunos se conseguem construir um triângulo em que não seja possível fazer o raciocínio acima;

2.11.5 Salientar que o raciocínio efectuado para concluir que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º não usa valores para os

ângulos; **2.11.6** Chamar a atenção dos alunos para o facto de que o raciocínio utilizado pode ser aplicado a qualquer triângulo independentemente da sua forma e concluir que independentemente do triângulo que se considere a conclusão é sempre válida.	
3) Distribuição da ficha de trabalho “Triângulos” aos alunos. **4)** Resolução, em grande grupo, da questão 1 da ficha de trabalho “Triângulos”. **4.1.-** Para cada uma das alíneas: **4.1.1** Elaborar um esboço da figura; **4.1.2** Questionar diferentes alunos sobre quais os dados fornecidos pela figura; **4.1.3** Questionar diferentes alunos relativamente ao que é que precisamos de saber; **4.1.4** Questionar os alunos sobre como podem obter o valor de *x*. **4.1.5** Registar no quadro a resolução de cada alínea.	10 min
5) Interpretação e resolução da questão 2 da ficha de trabalho “Triângulos”: **5.1.-** Em relação à alínea 2.1: **5.1.1** Elaborar um esboço da figura; **5.1.2** Questionar os alunos sobre quais os dados fornecidos; **5.1.3** Questionar os alunos sobre o que se pretende saber; **5.1.4** Recordar que devem de justificar a resposta, recorrendo às propriedades estudadas; **5.1.5** Sugerir que, para simplificar se denote os dois ângulos não assinalados na figura por *b* e *c*; **5.2.-** Para a alínea 2.2: **5.2.1** Elaborar um esboço da figura; **5.2.2** Questionar os alunos sobre os dados fornecidos; **5.2.3** Questionar os alunos sobre o que se pretende saber. **5.3.-** Resolução, a pares da questão 2 da ficha de trabalho “Triângulos I”.	10 min
6) Correcção e discussão da questão 2 da ficha de trabalho “Triângulos”. **6.1.-** Para cada uma das questões: **6.1.1** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro,	10 min

explicando-a aos colegas; **6.1.2** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se seguiram uma estratégia diferente ou chegaram a outra conclusão.	
7) Distribuição da ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo” e indicação da metodologia de trabalho: **7.1.-** Indicar que a ficha será realizada no *GeoGebra*, a pares; **7.2.-** Interpretar, conjuntamente com a turma, a ficha de trabalho: **7.2.1** Projectar o ficheiro *GeoGebra* **ânguloexternoI.ggb**; **7.2.2** Analisar a definição de ângulo externo; **7.2.3** Informar que a construção geométrica pedida, já se encontra guardado nos computadores na pasta 7ºC com o nome **anguloexternoI.ggb**; **7.2.4** Chamar a atenção que na questão 2 se pretende verificar se a relação encontrada na questão 1 é ou não válida para os outros ângulos externos; **7.2.5** Salientar que na questão 3, a conjectura refere-se à relação identificada na questão 1; **7.3.-** Indicar que têm 25 minutos para resolver a ficha de trabalho; **7.4.-** Relembrar os alunos de que devem registar todas as estratégias que utilizem. **8)** Realização, a pares, da ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo”. ❖ Caso os alunos tenham dificuldades em progredir nas suas investigações sugerir que utilizem a última coluna da tabela para efectuarem as somas dos dois ângulos internos que se encontram na tabela.	25 min
9) Discussão e síntese das conclusões obtidas pelos alunos na realização da ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo”. **9.1.-** Questionar os alunos em relação à utilização que fizeram da última coluna da tabela; **9.2.-** Pedir a um par de alunos que explique a conjectura que formulou sobre a relação entre os ângulos internos do triângulo e o ângulo externo CBE; **9.3.-** Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam sobre a	15 min

conjectura dos colegas e se formularam alguma conjectura diferente;

9.4.- A partir das conclusões das conjecturas formuladas pelos alunos, registar a relação entre os ângulos internos e externos do triângulo;

Em qualquer triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo não adjacentes.

9.5.- Questionar os alunos sobre de que forma podemos garantir que não conseguimos encontrar um triângulo em que não se verifique esta relação.

9.6.- Questionar os alunos relativamente a que propriedade conhecem dos ângulos internos de um triângulo;

9.7.- Registar que $\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180°$;

9.8.- Questionar os alunos sobre o que podem dizer sobre os ângulos ABC e CBE;

9.9.- Registar que $\angle CBE + \angle ABC = 180°$.

Trabalhos para casa (em folha à parte)	**Tarefas Extra**
• Página 17, questões 2 • Página 39, questões 7 e 9	• Página 17, questão 3

Avaliação

- As tarefas realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.

Sexta aula (12 de Maio de 2011)

<table>
<tr><td colspan="2">Unidade Temática: Geometria
Tópico: Triângulos e Quadriláteros
Sub-tópicos: Soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.</td><td colspan="2">Lições Números: 119 e 120
Data: 12/05/2011
Sala: 12</td></tr>
<tr><td colspan="2"><u>Sumário</u>
Conclusão da aula anterior.
Soma dos ângulos externos de um triângulo.
Correcção do T.P.C.</td><td colspan="2">Conhecimentos prévios
Ângulos verticalmente opostos;
Ângulos alternos internos;
Soma dos ângulos internos de um triângulo.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Objectivos
Deduzir o valor da soma de ângulos externos de um triângulo;
Formular, testar e demonstrar conjecturas;
Distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Recursos / Materiais
Computador com possibilidade de acesso ao GeoGebra;
Quadro interactivo;
Ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo”;
Ficha de trabalho “T.P.C. – Relações entre ângulos III”;
Ficha de trabalho “Ângulos II”;
Ficha de trabalho “Triângulos”;
Ficheiro GeoGebra anguloexternoI.ggb;
Manual de Matemática do 7.ºano (Parte II);
Calculadora.</td></tr>
<tr><td colspan="3">Desenvolvimento da aula</td><td>Tempo previsto</td></tr>
<tr><td colspan="3">1) Registo do sumário no quadro. Anotação dos alunos que faltam. Recolha do trabalho de casa.</td><td>10 min</td></tr>
<tr><td colspan="3">2) Discussão e síntese das conclusões obtidas pelos alunos na realização da ficha de trabalho “Ângulos externos de um Triângulo”.</td><td>20 min</td></tr>
</table>

2.1.- Projectar o ficheiro *GeoGebra* **anguloexternoI.ggb**;

2.2.- Questionar os alunos sobre quais as conjecturas que formularam;

2.3.- Seleccionar uma conjectura que não seja válida;

2.3.1 Pedir ao par de alunos, responsável pela conjectura, que a explique aos colegas, explicitando aquilo em que se basearam para a formular;

2.3.2 Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam da conjectura dos colegas, pedindo que justifiquem a sua opinião;

2.3.3 Questionar os alunos se é possível encontrar um exemplo que confirme ou invalide a conjectura dos colegas;

2.3.4 A partir das respostas dos alunos, registar um contra-exemplo da conjectura;

2.4.- Seleccionar a conjectura correspondente à relação entre os ângulos internos e o ângulo externo;

2.4.1 Pedir ao par de alunos, responsável pela conjectura, que a explique aos colegas, explicitando aquilo em que se basearam para a formular;

2.4.2 Questionar os restantes alunos relativamente ao que pensam da conjectura dos colegas, pedindo que justifiquem a sua opinião;

2.4.3 Questionar os alunos sobre se é possível encontrar um exemplo que confirme a conjectura em causa;

2.5.- Atendendo à conjectura formulada pelos alunos, registar a relação entre os ângulos internos e externos do triângulo;

Em qualquer triângulo, a amplitude de um ângulo externo é igual à soma das amplitudes dos ângulos internos do triângulo não adjacentes.

2.6.- Pedir aos alunos que elaborem, a pares, uma demonstração da propriedade numa folha à parte:

2.6.1 Questionar os alunos sobre de que forma podemos garantir que não conseguimos encontrar um triângulo em que não se verifique esta relação;

2.6.2 Questionar os alunos sobre como podemos ter a certeza de que em qualquer triângulo se verifica a relação que encontraram;

2.7.- Atendendo às respostas dos alunos, elaborar e registar a demonstração:

2.7.1 Questionar os alunos relativamente a qual a relação existente entre o ângulo externo e o ângulo interno adjacente; **2.7.2** Registar que $\angle CBE + \angle ABC = 180°$, porque são ângulos suplementares. **2.7.3** Questionar os alunos sobre o que sabem sobre os ângulos internos de um triângulo; **2.7.4** Registar que $\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC = 180°$; **2.7.5** Concluir que $\angle CBE = \angle BCA + \angle CAB$.	
3) Discussão, em grande grupo, sobre a soma dos ângulos externos de um triângulo. **3.1.-** Utilizando o ficheiro *GeoGebra* **anguloexternoI.ggb**, apresentar aos alunos diferentes valores de ângulos externos e das respectivas somas: **3.1.1** Marcar os ângulos externos no ficheiro; **3.1.2** Somar os ângulos externos do triângulo; **3.1.3** Mover os vértices do triângulo e registar alguns dos valores obtidos; **3.2.-** Questionar os alunos sobre que conjectura podem formular relativamente à soma dos ângulos externos de um triângulo, a partir dos valores observados; **3.3.-** Demonstração da conjectura com a participação dos alunos: **3.3.1** Questionar os alunos sobre de que modo podem provar que a conjectura é verdadeira; **3.3.2** Questionar os alunos sobre o que pretendemos concluir; **3.3.3** Questionar os alunos relativamente às propriedades que conhecem dos ângulos externos; **3.3.4** Questionar os alunos sobre o que sabem sobre os ângulos internos de um triângulo; **3.3.5** Questionar os alunos se o raciocínio efectuado depende do triângulo que se considere. **3.4.-** Registar a conclusão: A soma dos ângulos externos de qualquer triângulo é sempre 360º.	20 min
4) Correcção e discussão da ficha de trabalho "T.P.C. – Relações entre	20 min

ângulos III"

4.1.- Para a questão 1:

4.1.1 Projectar a questão 1 da ficha de trabalho;

4.1.2 Analisar as imagens correspondentes às situações em que os ângulos são adjacentes:

i) Questionar os alunos sobre que aspectos encontram em comum nas quatro imagens;

4.1.3 Analisar as imagens correspondentes às situações em que os ângulos não são adjacentes:

i) Questionar os alunos sobre se encontram, também, aspectos comuns entre as várias imagens deste novo grupo;

ii) Questionar os alunos que aspectos distinguem este novo grupo de imagens das primeiras;

4.1.4 Para cada uma das imagens do último grupo:

i) Questionar um aluno sobre se a imagem representa um par de alguns adjacentes, pedindo que justifique a sua opinião;

4.2.- Atendendo à análise realizada na questão 1, questionar os alunos relativamente à definição de ângulos adjacentes e registar a definição:

Dois ângulos são adjacentes se têm o mesmo vértice e um lado comum, não estando nenhum deles contido no outro.

4.3.- Para as alínea 2.1 e 2.4i) da questão 2:

4.3.1 Interpretar, conjuntamente com os alunos, o enunciado;

4.3.2 Pedir a um aluno que apresente a sua resolução no quadro, pedindo que a explique;

4.3.3 Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma conclusão diferente;

4.4.- Para as alíneas 2.2, 2.3 e 2.4 (excepto 2.4i)):

4.4.1 Interpretar, conjuntamente com os alunos, o enunciado;

4.4.2 Pedir a um aluno cuja resposta esteja incorrecta que apresente a sua resolução no quadro, pedindo que a explique;

4.4.3 Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião

acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma conclusão diferente; **4.4.4** Pedir a um aluno cuja resposta esteja correcta que apresente a sua resolução no quadro, pedindo que a explique; **4.4.5** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada e se chegaram a uma conclusão diferente.	
5) Correcção e discussão da ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos II” **5.1.-** Para cada alínea da questão 1: **5.1.1** Elaborar um esboço da figura **5.1.2** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução, explicando-a aos colegas; **5.1.3** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada; **5.2.-** Para a questão 2: **5.2.1** Elaborar um esboço da figura; **5.2.2** Questionar os alunos relativamente aos aspectos que consideram que se encontram errados na mesma, pedindo que justifiquem as respostas; **5.2.3** Questionar os alunos relativamente a que alterações se poderiam efectuar na figura de modo a que esta estivesse correcta.	10 min
6) Correcção e discussão das questões 2.4 e 2.5 da ficha de trabalho “Relações entre ângulos II”. **6.1.-** Para a alínea 2.4: **6.1.1** Elaborar um esboço da figura **6.1.2** Pedir a um aluno que apresente a sua resolução, explicando-a aos colegas; **6.1.3** Questionar os restantes alunos relativamente à sua opinião acerca da resolução apresentada; **6.2.-** Para alínea 2.5: **6.2.1** Elaborar um esboço da figura; **6.2.2** Questionar os alunos relativamente ao que pretendemos saber; **6.2.3** Questionar os alunos sobre quais os dados fornecidos;	10 min

6.2.4 Pedir à Vânia que apresente a sua resolução aos colegas, explicando como pensou; **6.2.5** Questionar os restantes alunos sobre o que pensam da resolução apresentada; **6.2.6** Pedir à Diana que apresente a sua resolução aos colegas, explicando como pensou; **6.2.7** Questionar os restantes alunos sobre o que pensam da resolução apresentada.	

Tarefas Extra

- Correcção da questão 3 da ficha de trabalho "Triângulos".

Avaliação

- As tarefas realizadas serão recolhidas para, posteriormente, serem analisadas e avaliadas as produções dos alunos, bem como o seu desempenho.

Anexo II – Tarefas

Ficha de trabalho "Ângulos verticalmente opostos"

Ângulos verticalmente opostos

Esta tarefa será realizada com recurso ao *GeoGebra*.

Dois ângulos dizem-se **verticalmente opostos** se têm o vértice comum e os lados de um estão no prolongamento dos lados do outro.

Desenha uma recta que passe por dois pontos A e B.

Desenha a recta CD, de modo a que intersecte a recta AB.

Assinala o ponto de intersecção das duas rectas e denota-o por E.

Investiga que relações existem entre os ângulos verticalmente opostos formados pelas duas rectas.

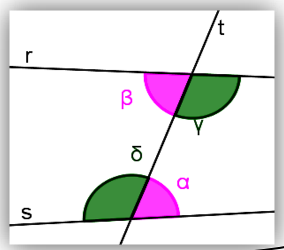
Regista alguns exemplos das explorações que realizaste.

(Adaptado de Ponte, J. P., Oliveira, P. & Candeias, N. (2009). *Triângulos e quadriláteros – Materiais de apoio ao professor, com tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC retirado de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/002_Sequencia_Geometria_TrianguloseQuadrilateros_NPMEB_3c%28actual17maio2010.pdf)

Ficha de trabalho "Relações entre ângulos I"

<u>Relações entre ângulos I</u>

Consideremos duas rectas *r* e *s* e uma recta *t* secante às duas. Dos ângulos determinados pela secante, dizemos que os pares α e β; γ e δ se chamam ângulos alternos internos.



1. Constrói, de acordo com as etapas abaixo indicadas, duas rectas paralelas e uma terceira recta de modo a que intersecte as outras duas.

   Etapas:

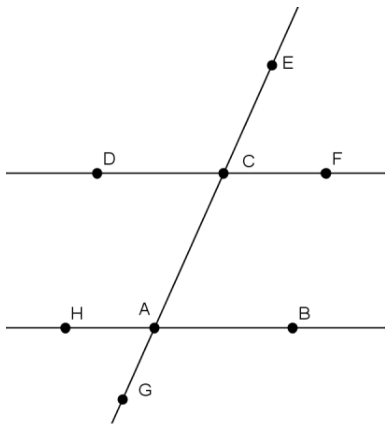
   i) Constrói a recta AB.

   ii) Marca o ponto C de modo a que não pertença à recta AB.

   iii) Constrói a recta paralela à recta AB e que passa por C.

   iv) Constrói a recta AC.

   v) Marca os pontos D, E, F, G e H, de acordo com a figura.



2. Mede os oito ângulos existentes na figura.

   2.1. Escreve todos os ângulos alternos internos que encontraste na figura.

   2.2. Move o ponto A. Investiga as relações que existem entre os ângulos alternos internos. Regista alguns exemplos das explorações que realizaste.

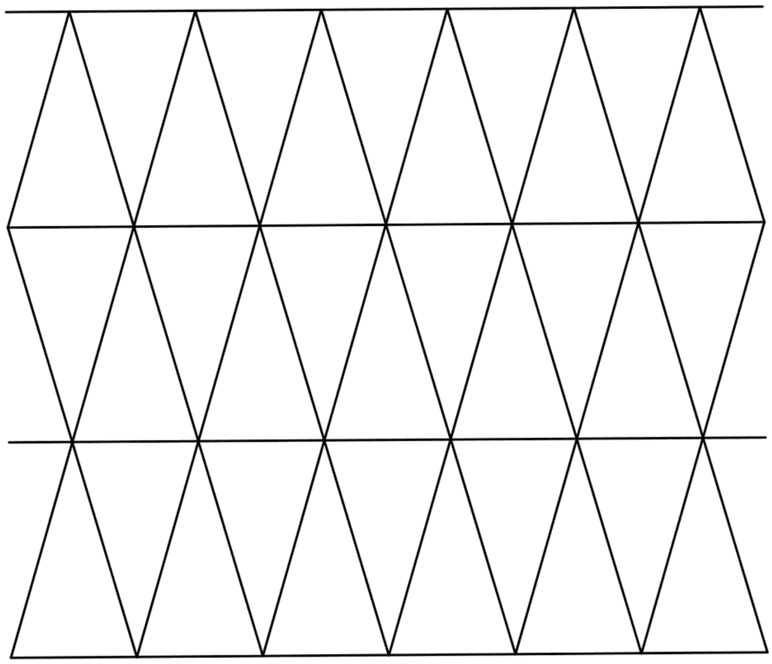
3. Regista outras relações que encontres entre os vários ângulos da figura. Justifica.

(Adaptado de Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8.º ano)*. (Tese mestrado, Universidade de Lisboa).)

Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos I”

T.P.C. – Ângulos I

1. A rede apresentada na figura seguinte é formada por três feixes de rectas paralelas.



1.1. De todos os ângulos que podes encontrar na figura, assinala utilizando cores distintas:

i) 2 ângulos agudos;

ii) 2 ângulos obtusos;

iii) 1 ângulo raso;

iv) 1 ângulo giro;

v) 4 pares de ângulos verticalmente opostos;

vi) 3 pares de ângulos alternos internos;

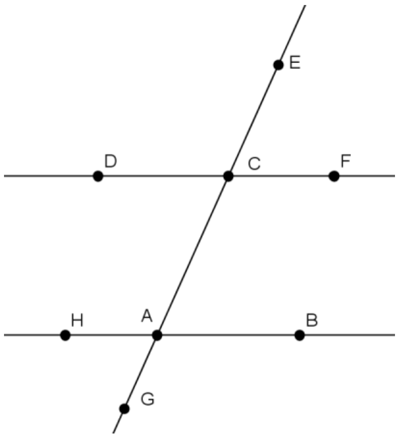
vii) 5 ângulos congruentes;

1.2. Efectua uma legenda, indicando a que corresponde cada uma das cores utilizadas.

Ficha de trabalho "Relações entre ângulos II"

<u>Relações entre ângulos II</u>

1. Considera a figura em que r e s são rectas paralelas.



1.1. Das seguintes afirmações indica justificando se são verdadeiras ou falsas:

1.1.1. $\angle DCA = 40°$ e $\angle CAB = 50°$

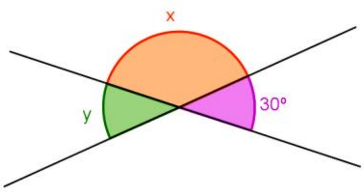
1.1.2. $\angle ECD = 140°$ e $\angle CAB = 40°$

1.1.3. $\angle ECF = 40°$ e $\angle CAB = 40°$

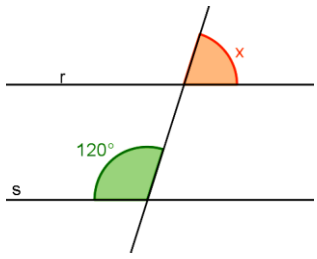
1.2. Se $\angle ECD = 130°$, quanto mede o ângulo CAH?

2. Sem recorrer ao transferidor, determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras nas figuras seguintes. Explica como obtiveste a tua resposta.

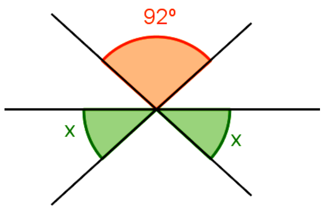
2.1.



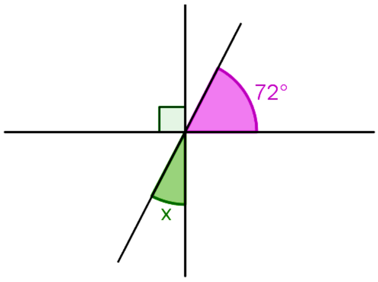
2.2. *r* e *s* são paralelas



2.3.

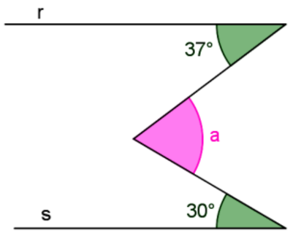


2.4.



(Adaptado de Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.)

2.5. *r* e *s* são paralelas



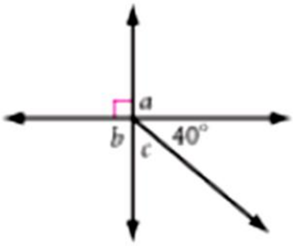
(Adaptado de Neves, M. A. F. & Faria, M. L. M. (1998). *Exercícios de matemática – parte 2 – matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.)

Ficha de trabalho “T.P.C. – Ângulos II”

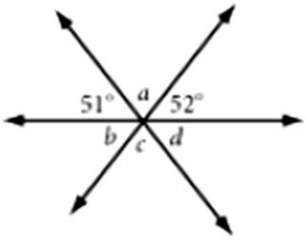
<u>T.P.C. – Ângulos II</u>

1. Sem recorrer ao transferidor, determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras nas figuras seguintes. Explica como obtiveste a tua resposta.

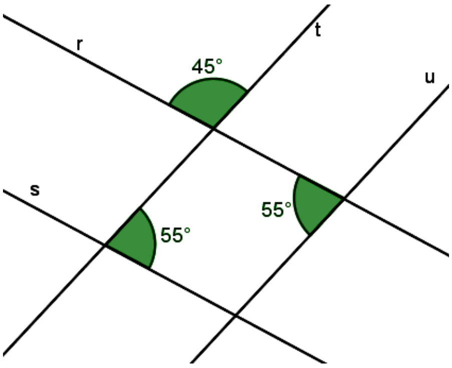
1.1.



1.2.



2. Observa a imagem seguinte. A recta *r* é paralela a *s* e a recta *t* é paralela a *u*. O que encontras de errado? Justifica a tua resposta.



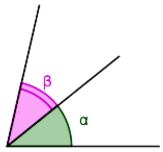
(Adaptado de Serra, M. (2008). *Discovering geometry*. Berkley: Key Curriculum Press.)

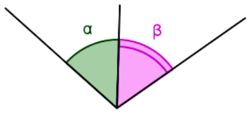
Ficha de trabalho "T.P.C. – Relações entre ângulos III"

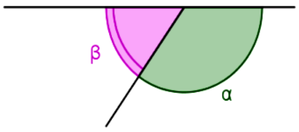
<u>T.P.C. – Relações entre ângulos III</u>

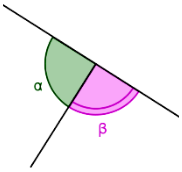
Ângulos adjacentes

1. Os seguintes ângulos (α e β) **são** adjacentes:

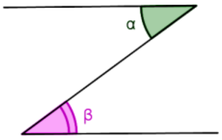


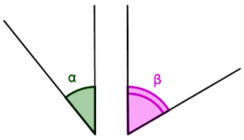


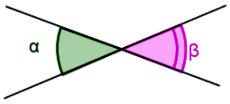


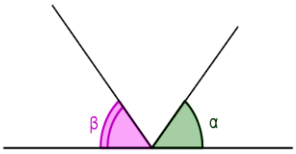


Os seguintes ângulos (α e β) **não são** adjacentes:

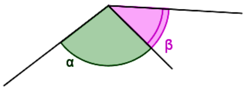


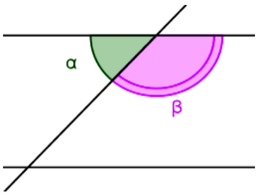


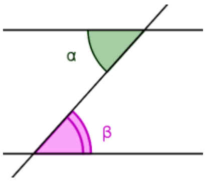


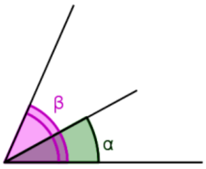


Em cada uma das seguintes figuras α e β são ângulos adjacentes? Justifica a tua resposta.









Dois ângulos são adjacentes ____

(Adaptado de NCTM (2001). *Geometria nos 2.º e 3. Ciclos – normas para o currículo e avaliação em matemática escolar, colecção adendas, anos de escolaridade 5 – 8*. Lisboa: APM. (Obra original publicada em 1992))

2. Diz se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações. Elabora um desenho que exemplifique cada uma delas.

2.1. Dois ângulos adjacentes quaisquer são congruentes.

2.2. Dois ângulos quaisquer que tenham um lado comum são suplementares.

2.3. Dois ângulos de alternos internos são sempre congruentes.

2.4. Duas rectas quaisquer distintas que se intersectem formam sempre:

i) Dois pares de ângulos verticalmente opostos;

ii) Pelo menos um par de ângulos adjacentes;

iii) Pelo menos um par de ângulos suplementares;

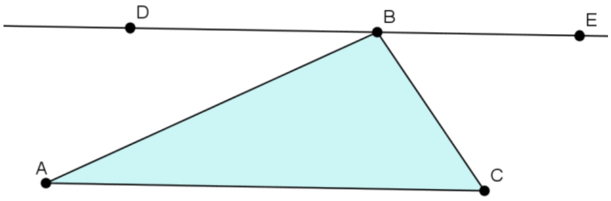
iv) Pelo menos um par de ângulos complementares.

(Adaptado de Conceição, A., Almeida, M., Conceição, C. & Costa, R. (2010). *MSI 5 – matemática sob investigação – parte 1*. Porto: Areal Editores.)

Ficha de trabalho “Ângulos internos de um Triângulo”

<u>Ângulos internos de um Triângulo I</u>

Observa o triângulo ABC, representado na figura ao lado. A recta DE é paralela ao lado AC do triângulo e que passa pelo vértice B.



1. Qual é o valor da soma dos ângulos DBA, ABC e CBE? Porquê?

2. Identifica os pares de ângulos congruentes existentes na figura. Justifica.

3. Atendendo às respostas às questões anteriores, qual é, então, o valor da soma dos ângulos internos do triângulo ABC? Porquê?

4. A conclusão que tiraste na questão anterior permaneceria válida se tivéssemos considerado outro triângulo? Porquê?

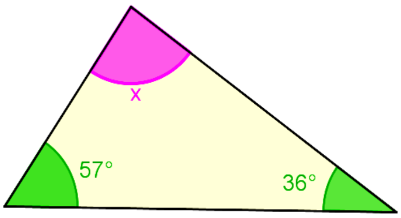
(Adaptado de Candeias, N. (2005). *Aprendizagem em ambientes de geometria dinâmica (8.º ano)*. (Tese mestrado, Universidade de Lisboa).)

Ficha de trabalho “Triângulos”

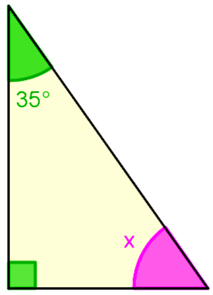
Triângulos I

1. Para cada um dos triângulos seguintes determina a amplitude do ângulo em falta. Apresenta todos os cálculos que efectuares.

1.1.

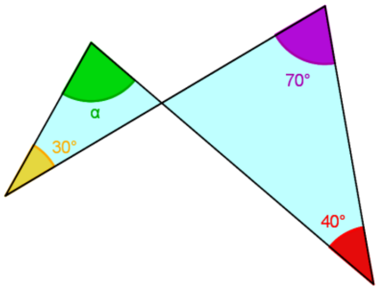


1.2.

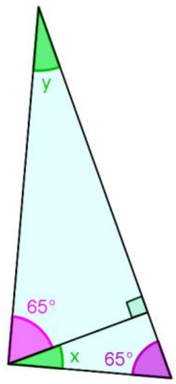


2. Determina os valores da amplitude dos ângulos representados por letras nas figuras, sem recorrer ao transferidor. Explica como obtiveste a tua resposta.

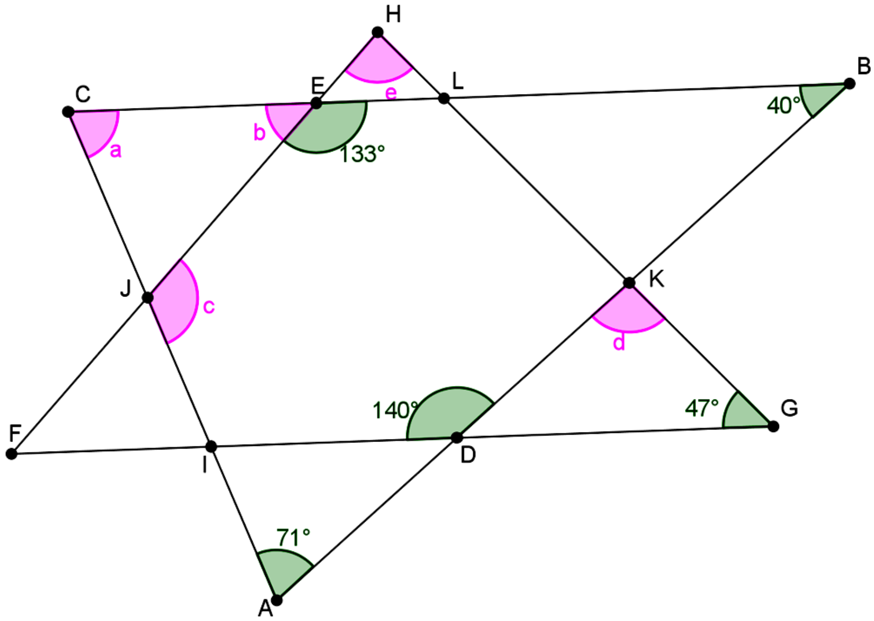
2.1.1.



2.2.



5. Determina os valores da amplitude dos ângulos representados por letras na figura seguinte, sem recorrer ao transferidor. Explica como obtiveste a tua resposta.

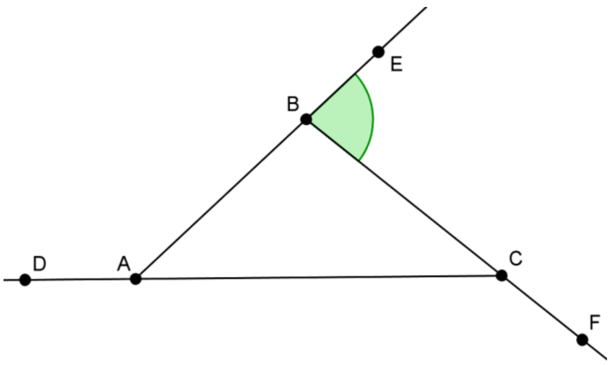


(Adaptado de Serra, M. (2008). *Discovering geometry*. Berkley: Key Curriculum Press.)

Ficha de trabalho "Ângulos externos de um Triângulo"

Ângulos externos de um Triângulo I

Constrói um triângulo ABC. Prolonga os seus lados, à semelhança da figura ao lado e marca os pontos D, E e F.



Um ângulo externo de um triângulo é um ângulo formado por um dos lados do triângulo e o prolongamento de outro lado do triângulo.
Assim, dizemos que ângulo CBE é um **ângulo externo** do triângulo ABC.

5. Determina a amplitude do ângulo externo CBE. Move um dos vértices do triângulo e vai registando as amplitudes dos ângulos internos e do ângulo externo CBE. Consegues detectar alguma relação? Qual?

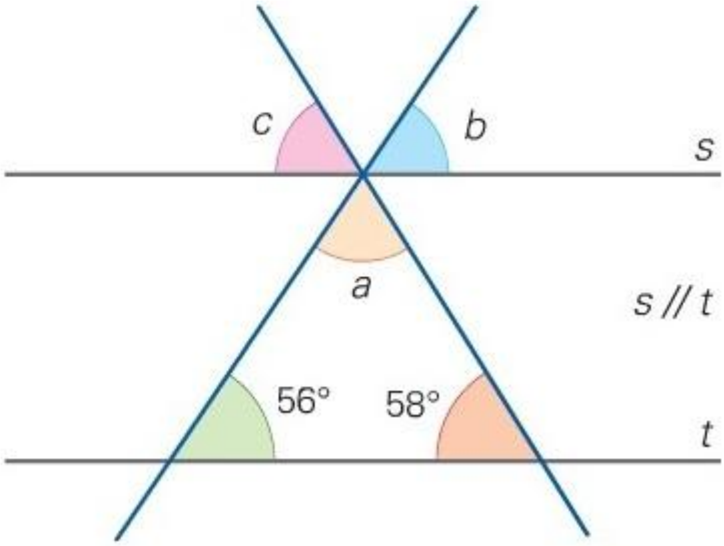
∠CBE	∠BCA	∠CAB	

6. Verifica o que acontece com outro ângulo externo do triângulo.

7. Formula e regista uma conjectura. Justifica-a.

Manual página 39 questão 6

Na figura seguinte as rectas s e t são estritamente paralelas.



Determina a amplitude dos ângulos representados pelas letras a, b e c.

Explica como obtiveste a tua resposta.

Retirado de Neves, M. A. F., Leite, A., Silva, A. P. & Silva, J. N. (2010). *Matemática – parte 2: matemática 7.º ano*. Porto: Porto Editora.

Anexo III – Autorizações

Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres

Ex^{mo}. Sr. Encarregado de Educação

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pela professora Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano lectivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva. Para isso, entre o inicio de Março e o fim de Maio de 2011 as aulas de Matemática da turma C do 7.º ano serão por mim leccionadas, com orientação da professora Cristina Ramos.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas por mim leccionadas, assim como gravações áudio de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade do seu educando. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes. A Direcção da Escola foi informada deste trabalho e dos procedimentos necessários relativos às gravações.

Para o efeito, solicito a sua autorização para proceder às gravações, manifestando inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento que considere necessário.

Agradeço a sua atenção

Cristina Rei Santos

Tapada das Mercês, 5 de Janeiro de 2011

Autorização

Autorizo que o meu educando participe nas gravações vídeo e áudio necessárias para a realização do trabalho acima referido.

O Encarregado de Educação do aluno ……………………………………………………………………...……. N °….., 7°C

……………………………………………………………………………………….

(Assinatura do Encarregado de Educação)

Ex^{ma}. Sra.

Directora da Escola Básica 2, 3 Maria Alberta Menéres

Informo que, no âmbito de um trabalho de investigação orientado pela professora Hélia Oliveira (Instituto de Educação da Universidade de Lisboa), no presente ano lectivo estou a desenvolver um estudo relacionado com a minha prática lectiva. Para isso, entre Março e Maio de 2011 as aulas de Matemática da turma do 7.º C serão por mim leccionadas, com orientação da professora Cristina Ramos.

Para a realização deste trabalho pretendo obter gravações em vídeo e em áudio de algumas das aulas por mim leccionadas, assim como gravações áudio de entrevistas que serão feitas a alguns dos alunos da turma. Fica desde já garantida a privacidade dos alunos. Em qualquer situação de apresentação pública ou de publicação serão usados nomes fictícios para identificação dos diferentes intervenientes.

Alunos e respectivos Encarregados de Educação foram informados destes procedimentos. Aguardo a sua permissão para solicitar a autorização dos Encarregados de Educação para proceder às referidas gravações. Tenho inteira disponibilidade para prestar qualquer esclarecimento.

Com os melhores cumprimentos

Cristina Rei Santos

Tapada das Mercês, 4 de Janeiro de 2010